Laboratorio de MatemáTICa

Guía para realizar los ejercicios del Laboratorio de MatemáTICa
"Análisis Matemático I"

Envío por mail: matematica@frlp.utn.edu.ar
Web: matemática.frlp.utn.edu.ar
Canal de Youtube: https://www.youtube.com/channel/UCG8BiY04eu38wa6-99uAbag

Directora del Laboratorio: Ing. Viviana Cappello

Objetivos del Laboratorio de MatemáTICa

- Facilitar la incorporación de los conceptos de álgebra y análisis matemático con el uso de GeoGebra,un software matemático.

- Avanzar en el conocimiento, dándole mayor significado concreto a los temas vistos en las clases presenciales convencionales, pudiendo vivenciar desde la simulación los problemas planteados.

Metodología de trabajo

Los estudiantes deberán descargar de la página web del Laboratorio los ejercicios correspondientes a la materia Análisis Matemático 1. El seguimiento del aprendizaje del estudiantado será asistido por la docente y los ayudantes encargados del Laboratorio.

Es condición necesaria para los estudiantes que opten por la aprobación directa, que tengan mínimo 2 (dos) entregas al Laboratorio de MatemáTICa. Para los estudiantes que opten por el régimen regular dicha condición se fija en 1 (una) entrega final.

Los docentes encargados del Laboratorio de MatemáTICa llevarán un registro de dichas entregas y las informarán a los profesores de cada comisión respectivamente. Los trabajos prácticos específicos serán publicados al inicio del Laboratorio.

¿Qué es GEOGEBRA?

Se trata de un software libre de matemática. Ofrece representaciones diversas de los objetos: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos vinculadas.

Página web de inicio del programa

https://www.geogebra.org

Descargar GEOGEBRA

Podemos descargarlo en el siguiente enlace (seleccionemos la opción correspondiente al dispositivo pc, tablet o móvil)

https://www.geogebra.org/download

Es posible que el programa nos pida que instalemos una aplicación que se denomina Java. Es necesario instalar esta aplicación para que el programa funcione.

Comandos para el uso de GEOGEBRA

https://wiki.geogebra.org/es/Comandos

De los ejercicios totales del PDF, sólo se enviarán los que se detallan en la tabla siguiente. El resto son optativos, y tienen su correspondiente resolución

Primera entrega: del 1 al 8 de julio de 2021
Unidad 1 Ejercicio 2a
Unidad 2 Ejercicio 2 a
Unidad 3 Ejercicios 2 y 3
Unidad 4 Ejercicio 1 a y 1n

Segunda entrega: del 1 al 5 de diciembre de 2021
Unidad 5 Ejercicio 1 c
Unidad 6 Ejercicio 1 a , c y g
Unidad 7 Ejercicio 1 a
Unidad 8 Ejercicio 1 a

Unidad Temática 1: Números Reales

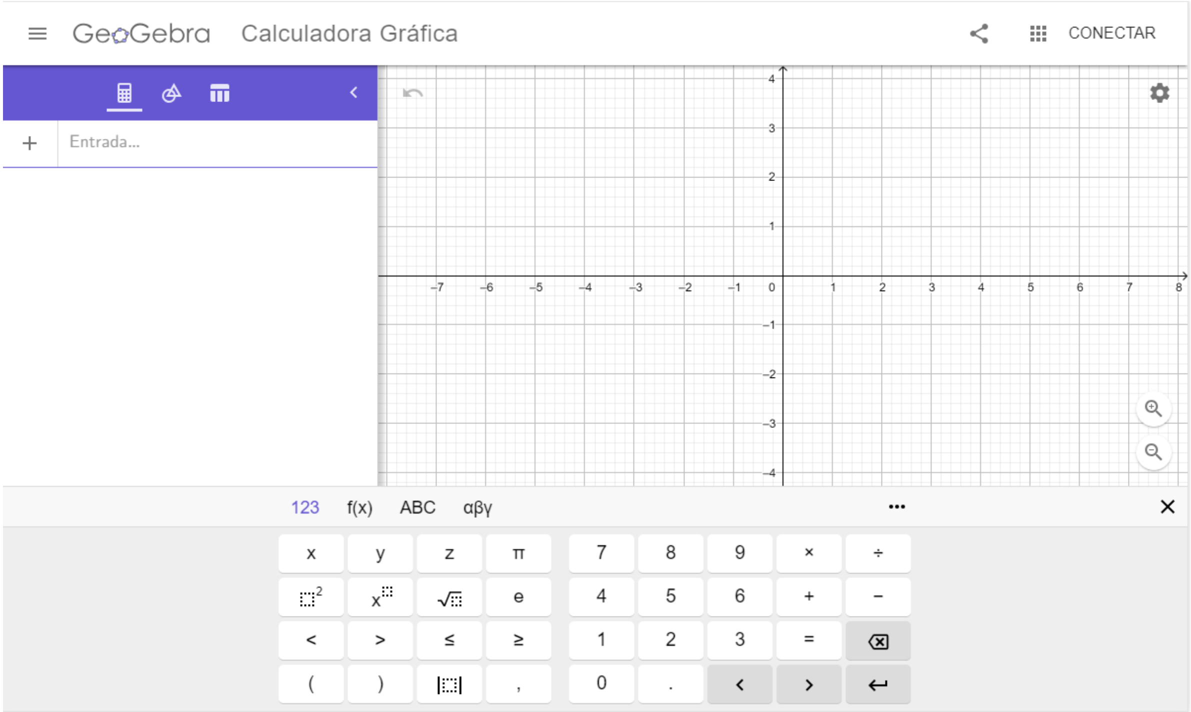
1. Interpreta y representa las siguientes expresiones
   a) $x \in (-3, \infty)$
   b) $x \in (-2{,}5]$
   c) $x \in (-\infty, 8]$
   d) $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$
   e) $x \in (-10{,}5)\ (-1, \infty)$

2. Resolver las siguientes inecuaciones:
   a) $2x-3 \geq 7$
   b) $|x-2| \leq 3$
   c) $\frac{3}{2}x > 5$

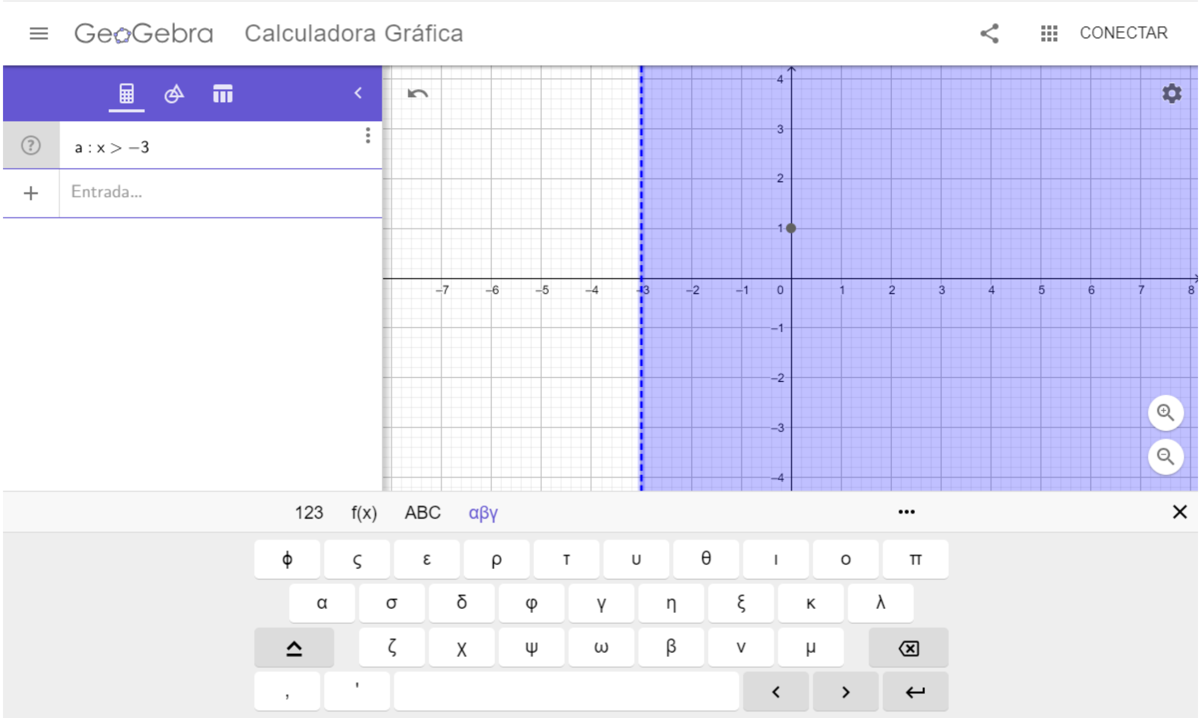
3. Verificar si las siguientes igualdades se cumplen:
   a) $7 + (5 + 10) = (7 + 5) + 10$
   b) $12 + 2$ es un número natural
   c) $(5 \cdot 2) \cdot 6 = 5 \cdot (2 \cdot 6)$
   d) $-2^8 = (-2)^8$
   e) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$
   f) $\sqrt[9]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[27]{5}$
   g) $\mathbf{(2^3)^5 = 2^{15}}$
   h) $5^8 : 5^4 = 5^{8-4}$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Para los ejercicios de esta unidad utilizaremos la calculadora que se encuentra en la parte inferior.



En la siguiente imágen se muestra un ejemplo de cómo resolver los ejercicios 1 y 2.



Unidad 2: Funciones

1. Graficar las siguientes funciones
   a) f(x)=3x+2
   b) f(x)=2x
   c) f(x)=x^2 -4
   d) f(x)= $\sqrt{x}$
   e) f(x)=$\sqrt{x-3}$
   f) f(x)= $\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2}$
   g) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$
   h) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+4} & \text{si } x<0 \\ \sqrt{\dfrac{3}{x-3}} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

2. Hallar el dominio de las siguientes funciones
   a) $$f(x)=\frac{2x^2-3}{x+2}$$
   b) $f(x)=2x^5-6x^3+8x^2-5$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^3+3x^2+3x+1}$

d) $f(x)=\sqrt{x^3-4x^2+3x}$

e) $f(x)=e^{2x-3}$

f) $f(x)=\ln(x-2)$

3. Sean las funciones ***f***, ***g*** y ***h***, dadas por sus ecuaciones: $f(x)=2x-1$; $g(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ y $h(x)=\sqrt{x+5}-1$.

   Calcula $5g(-2)+f\left(\frac{3}{2}\right).h(11)$

4. Dadas las siguientes funciones:

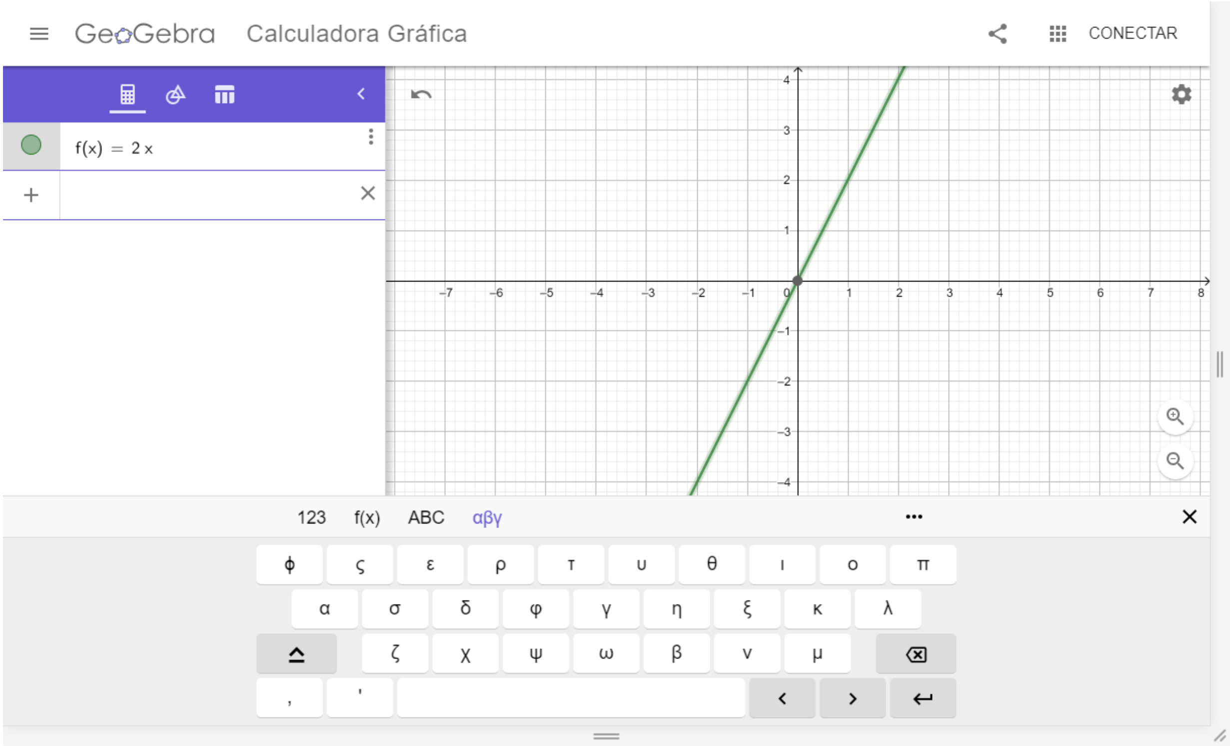
$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x\le -2 \\ x^2-4 & -2<x<3 \\ x^2-12x+32 & 3\le x \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x+7 & x\le -2 \\ 1-x & -2<x\le 3 \\ x-5 & 3<x \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 1-2x & x\le 0 \\ 2^x & x>0 \end{cases} \qquad i(x)=\begin{cases} x+3 & x<-1 \\ -1 & -1\le x\le 1 \\ 3-x & 1<x \end{cases}$$

   Calcular: f(-2), f(3), f(0), g(-2), g(-4), g(5), h(0), h(1/2), i(1), i(0)

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Las funciones se pueden graficar escribiéndolas en la "Calculadora". Una vez que fue escrita la podrás visualizar en la pantalla.



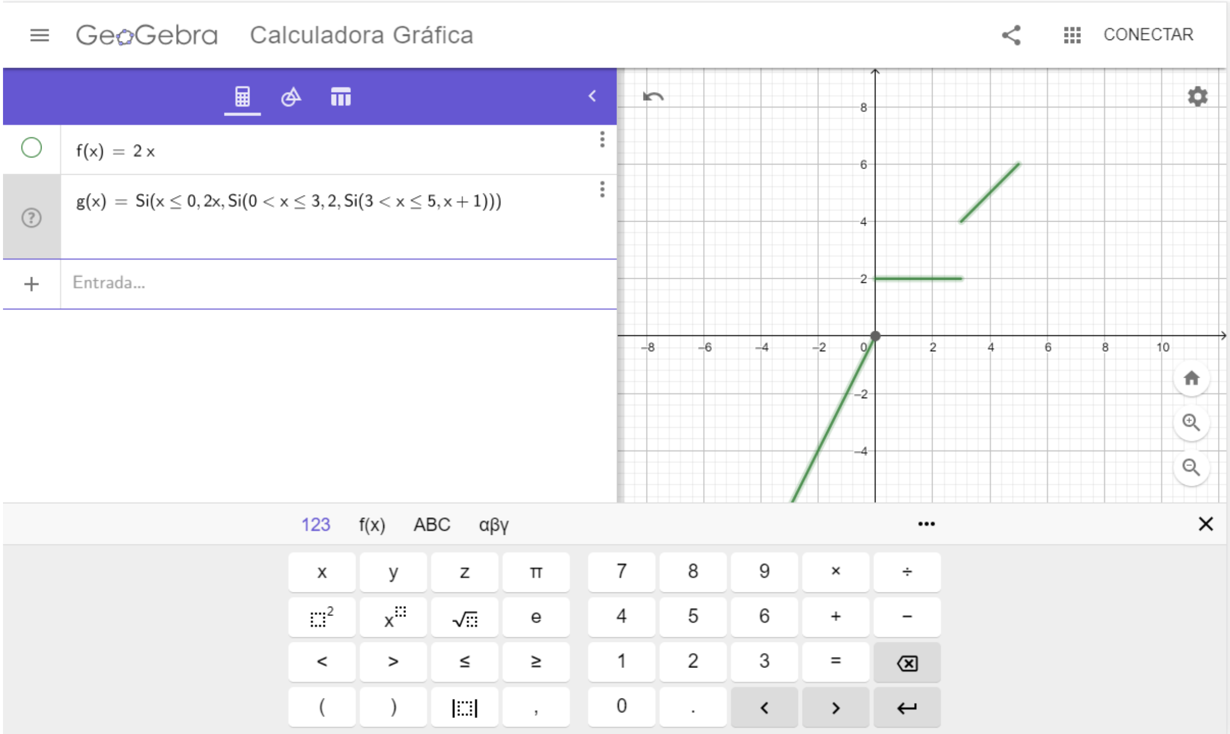
Para escribir una función por partes, se realiza de la siguiente manera:

Por ejemplo, la función dada por:

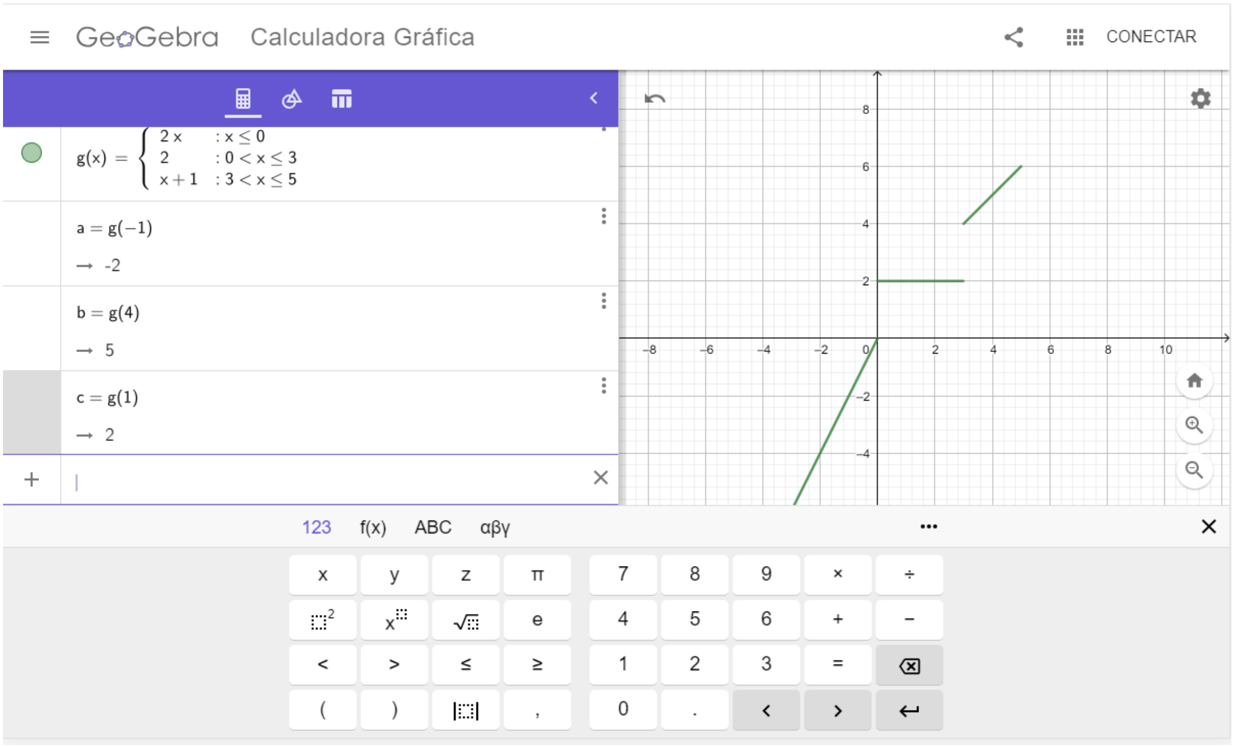
$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x+1 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Debemos escribir:

g(x)= si(primer intervalo, valor de la función, si(Segundo intervalo, valor de la función, si(tercer intervalo, valor de la función)))



Una vez que terminamos de escribir la función se mostrará de la siguiente forma:



Unidad 3: Límite y continuidad

1. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+2}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-x^2-x+1}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x^4}{x^6-x^2}$ f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$

g) $\lim_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ h) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

2. Graficar la siguiente función y verificar si el existe el límite cuando x=0

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

3. Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le -5 \\ x^2 & \text{si } -5<x\le 0 \\ x^3 & \text{si } 0<x\le 1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Calcular los límites cuando x=0, x=-4, x=1, x=10

4. ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la siguiente función?

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}$$

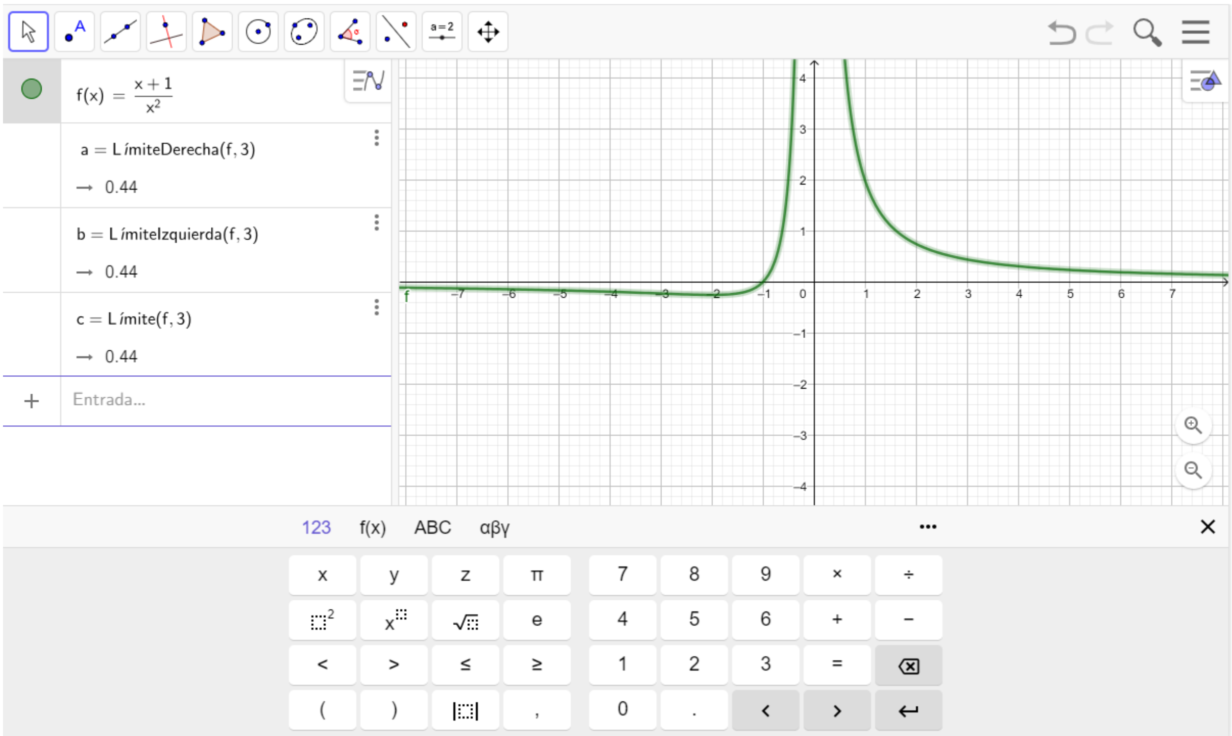
5. Calcular la asíntota horizontal de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{6x-1}{2-3x}$$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

En esta unidad buscamos que se comprendan los conceptos de límites gráficamente. Para la resolución de los ejercicios debemos realizar los siguientes pasos:

1. Graficar la función para cual debemos calcular el límite.
2. Visualizaremos la función gráficamente y analizaremos los límites por derecha y por izquierda para el punto dado. Si existen los límites laterales debemos analizar si valen lo mismo.
3. Una vez que finalizamos comprobaremos si lo analizado es correcto con el comando
    a) LímiteDerecha(<Función>, <Valor>): para verificar el límite lateral derecho.
    b) LímiteIzquierda(<Función>, <Valor>): para verificar el límite lateral izquierdo.
    c) Límite(<Función>, <Valor numérico>): para verificar si el límite existe.

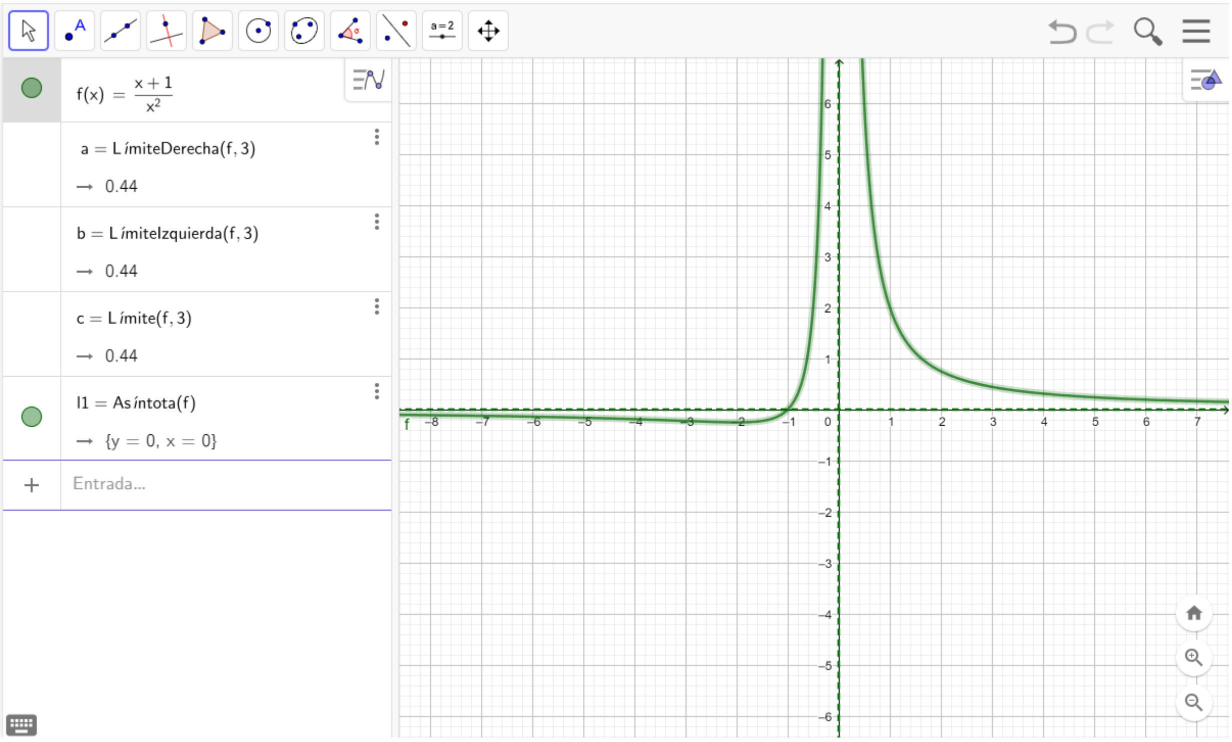


En las funciones por parte debemos seguir el mismo procedimiento, pero debemos tener en cuenta que al verificar con los comandos debemos ingresar la parte de la función correspondiente según lo que estemos analizando.

a) Si analizamos el límite por derecha, debemos ingresar la parte de la función que se acerca al punto que estamos calculando el límite por derecha.
b) Si analizamos el límite por izquierda, debemos ingresar la parte de la función que se acerca al punto que estamos calculando el límite por izquierda.
c) Cuando verifiquemos si el límite existe debemos ingresar la parte de la función donde está definido el punto para el cual estamos analizando el límite.

Podemos utilizar los límites para calcular las asíntotas de una función. Para los puntos 4 y 5 vamos a analizar este concepto gráficamente. Para ello:

a) Graficaremos la función dada.
b) Analizaremos donde puede haber asíntotas.
c) Verificaremos con el comando: Asíntota(<Función>)



Unidad 4: Derivadas

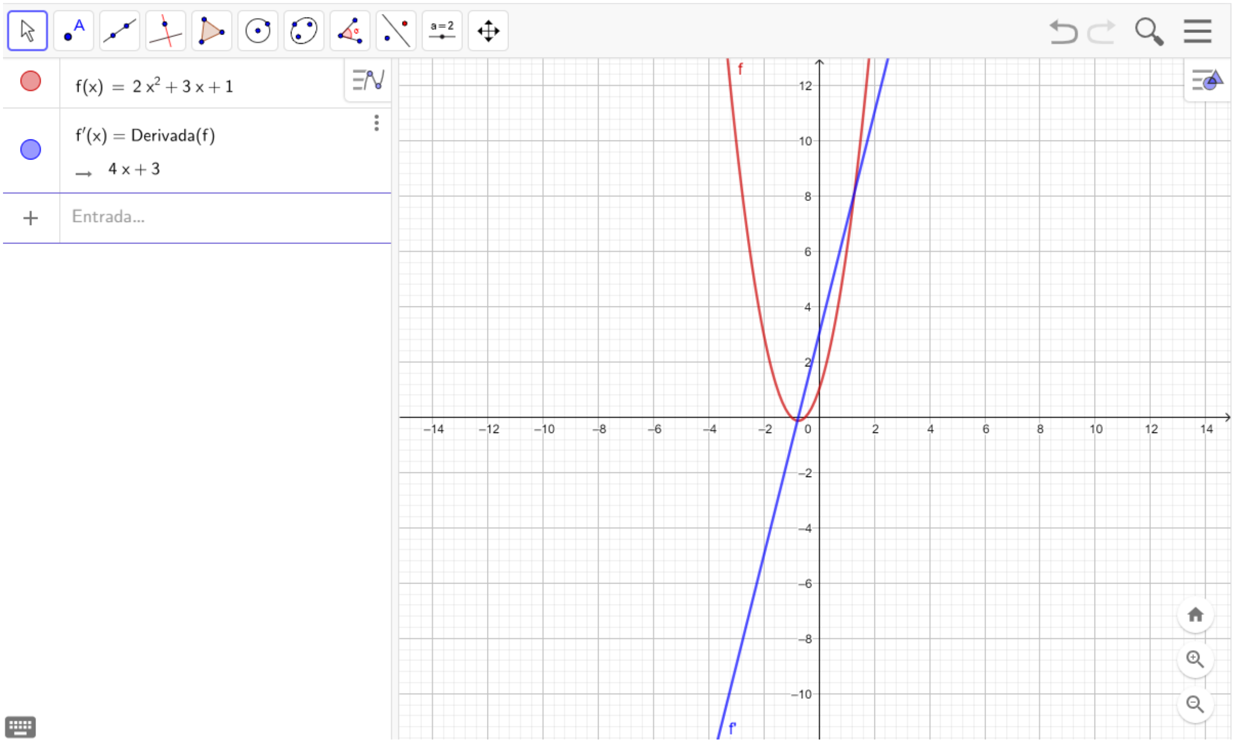
1. Hallar la derivada de las siguientes funciones y analizar las gráficas de ambas funciones. ¿Qué relación encuentra?
    a) $f(x)=x^6$
    b) $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$
    c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
    d) $f(x)=(x^2+x)^4$
    e) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2+1}$
    f) $f(x)=\dfrac{1}{x^5-x^2+3}$
    g) $f(x)=4^{\frac{3}{x}}$
    h) $f(x)=3.2^x$
    i) $f(x)=e^{2x^2}-e^x-2$
    j) $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{4}$
    k) $f(x)=ln\ (x^2+7)$
    l) $f(x)=\log_2(x^2+1)$
    m) $f(x)=ln\ \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
    n) $f(x)=sen\ 4x$
    o) $f(x)=sen\ \left(\dfrac{x}{4}\right)$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Sabemos por la teoría que en los intervalos donde la derivada de una función es mayor que cero, la función es creciente; y en los intervalos en los que la derivada de la función es menor que cero, la función es decreciente.

En esta unidad analizaremos el concepto de derivada gráficamente. Para ello:

1. Graficaremos la función
2. Graficaremos la derivada de la función con el comando: Derivada(<Función>)
3. Analizaremos la relación explicada anteriormente.



Unidad 5: Extremos relativos y Absolutos

1. Dadas las siguientes funciones, graficarlas y analizar si existen entremos en el intervalo dado.
   a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en $[-3,3]$
   b) $f(x) = =3x-x^3$ en $[-2,2]$
   c) $f(x) = x^4 - 8x$[redacted]$^2 + 3$ en $[-5,5]$

d) f(x) = $\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$en [0, 10]

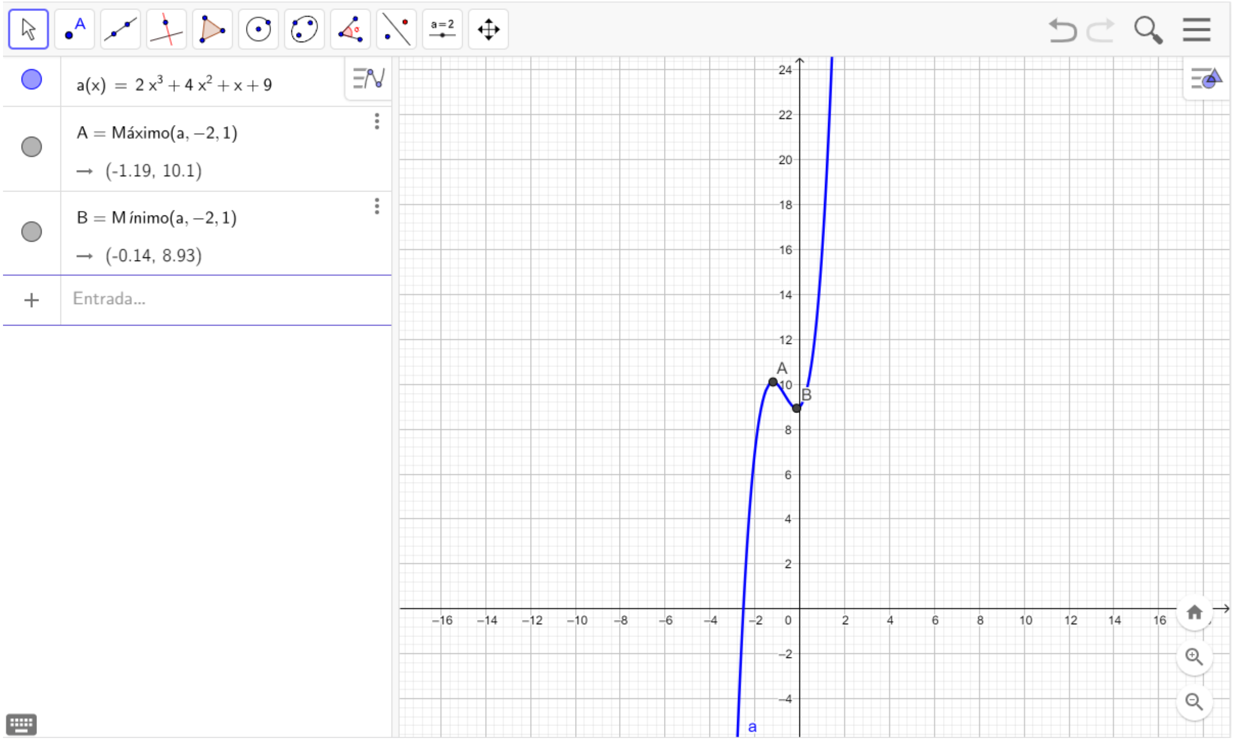
2. Dadas las siguientes funciones, graficar sus derivadas. Analizar en qué intervalos es mayor que cero y en cuáles menor. Estimar como debería ser la función creciente o de creciente. Graficar la función para ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    a) f(x) = =$3x-x^3$
    b) f(x) =$x^2 + 1$
    c) f(x)= ln $(x^2 + 1)$
    d) f(x)= x+5

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

En esta unidad analizaremos los extremos de una función. Para ellos:

1. Graficar la función.
2. Analizar si existen extremos absolutos en el intervalo dado.
3. Usar los siguientes comandos para verificar lo analizado:
    a) Máximo(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)
    b) Mínimo(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)



Para el segundo punto, graficaremos la derivada de la función y analizaremos cómo debe ser la función a partir de visualizar los intervalos menores que cero y los mayores que cero. Luego graficaremos la función para verificar.

Unidad 6: Integrales

1. Graficar las siguientes funciones y hallar su integral

a) $\int x^5 \, dx$

b) $\int e^x dx$

c) $\int (3x^4 + x^2 + 2)dx$

d) $\int (x + \sqrt{x})dx$

e) $\int \cos 2x \, dx$

f) $\int \frac{2}{3x+2} dx$

g) $\int e^{2x} dx$

h) $\int \frac{1}{1-x} dx$

i) $\int e^{5x+3} dx$

j) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx$

k) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$

l) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{e^{3x}}\right) dx$

m) $$\int \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$$

n) $$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

o) $$\int \frac{-3}{4+x^2} dx$$

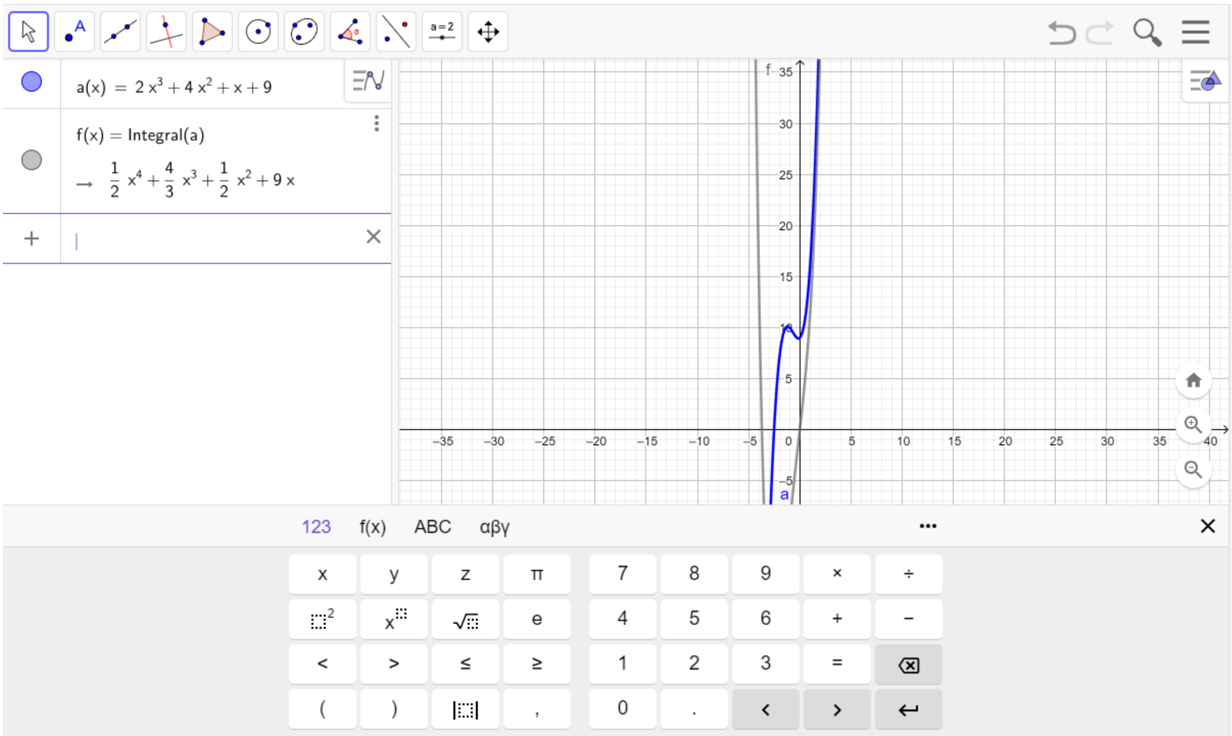
p) $$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

q) $$\int \sqrt{x+1}dx$$

r) $$\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+3}} dx$$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

1. Graficar la función dada en el ejercicio.
2. Calcular la integral de la misma con el comando: Integral(<Función>).
3. Verificar si lo realizado analíticamente es correcto.



Unidad 7: Integrales definidas

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\int_0^1 (2x-3)\,dx$

   b) $\int_1^2 \frac{5-x}{x^3}\,dx$

   c) $\int_1^5 2\sqrt{x-1}\,dx$

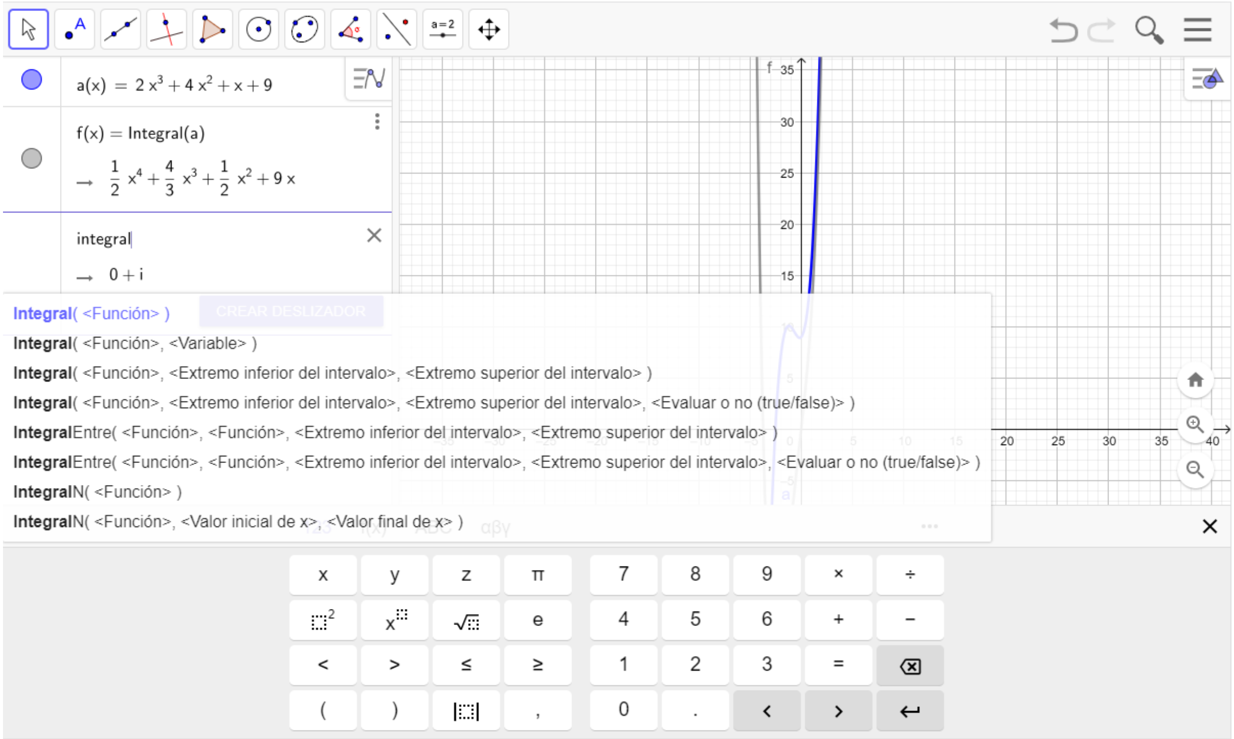
   d) $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)$

   e) $\int_{-2}^0 (x-2)(x+1$

   f) $\int_0^4 \left(1+2\sqrt{x}\right)$

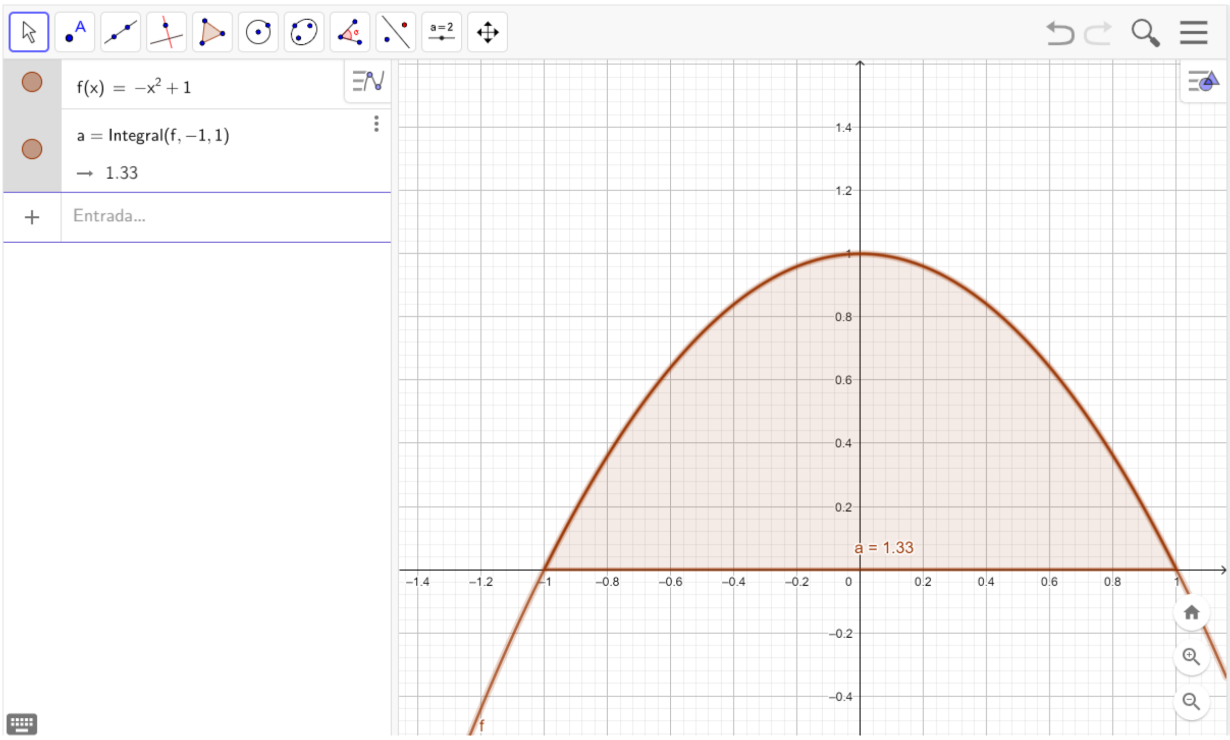
Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Para las integrales definidas, en especial para el cálculo de áreas bajo curva y eje x o entre curvas; existen varios comandos que se pueden utilizar, todos ellos con diferentes parámetros a introducir.



Obtengamos la región con el comando:

Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)



Unidad 8: Primitivas e integrales definidas

1. Calcular la región limitada por:

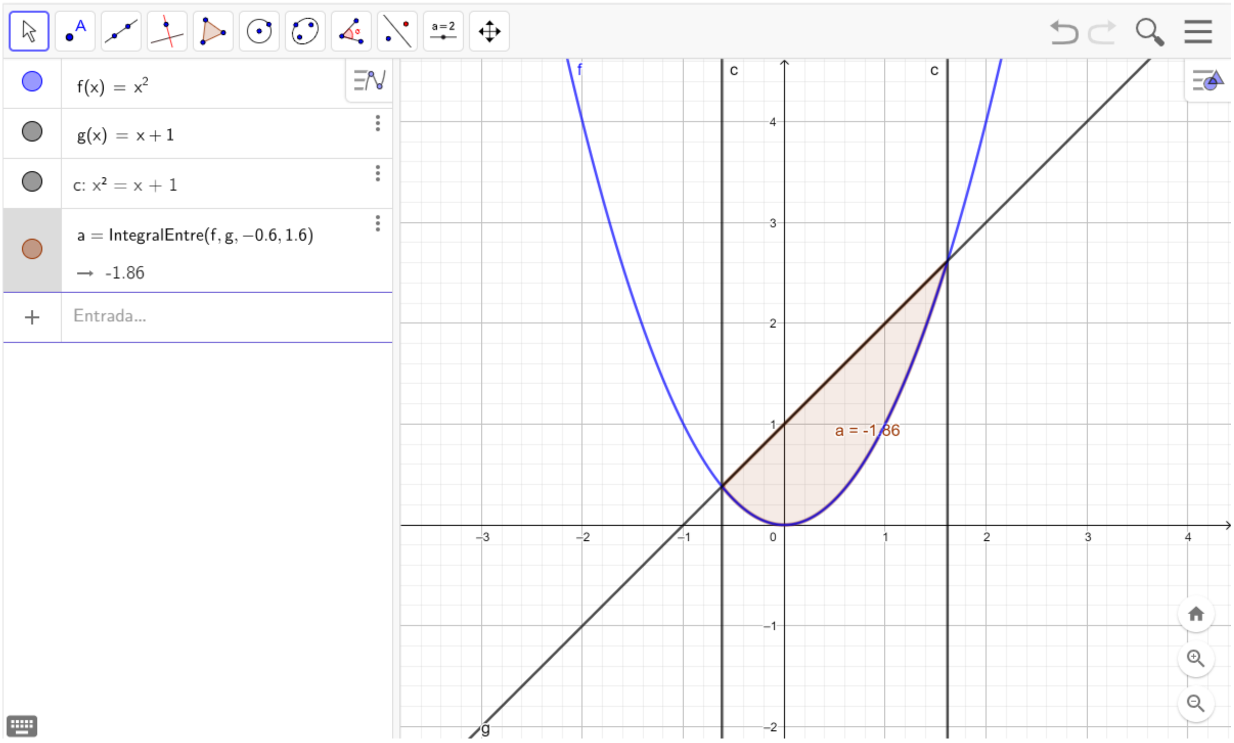
   a) La curva y=x^2 , el eje x y las recta x=-1 y x=4
   b) y = x^2 + 2x - 1 con la recta y = - x - 1
   c) y=$\sqrt{x}$con y = x^2
   d) El eje de abscisas, la recta y = x + 1 y la recta x = 4
   e) y = ln x, el eje de abscisas y las rectas x = 2, x = 10

2. Hallar el volumen que se engendra al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre la siguiente parábola: $y=\frac{x^2}{4}$ y las rectas x=0 y x=4.
3. Dada la siguiente función: $f(x)=2.\sqrt{x}+1$, representar gráficamente el sólido engendrado por su rotación alrededor del eje x, entre las rectas x=1 y x=4 y calcular su volumen.
4. Calcular el volumen engendrado por la siguiente función por su rotación alrededor del eje y: $f(x)=2.\sqrt{x}+1$ y las rectas x=1 y x=4.
5. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de y = x^2+1, y = 0 , x = 0 , y x = 1 en torno al eje y.

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Para los ejercicios de esta unidad lo primero que debemos hallar son los intervalos de integración para ello debemos resolver la ecuación que surge de igualar ambas funciones y con dichos valores utilizar el comando:

IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)



En los ejercicios 2, 3, 4 y 5 debemos calcular sólidos de revolución y para ello utilizaremos una Applet creada, en donde se ingresan los datos e inmediatamente se visualiza el cuerpo y se obtiene su capacidad.

Calculadora de sólidos de revolución

1. Trabajar desde el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/yerbN2pG
2. Este applet permite visualizar el sólido de revolución generado al rotar una región plana alrededor del eje x y calcular su volumen:
    a) Ingresá la función f(x) a rotar y los valores a y b entre los cuales se quiere delimitar.
    b) Si el sólido tiene cavidades o huecos, tildá la casilla correspondiente e ingresá la función g que define su cavidad.
    c) Para visualizar el sólido, clic en la casilla correspondiente e incrementar los valores del deslizador.