Laboratorio de MatemáTICa

Guía para realizar los ejercicios del Laboratorio de MatemáTICa

Análisis Matemático II

Directora del Laboratorio: Ing. Viviana Cappello

Ayudante: María Sol Lara

Introducción

El presente documento tiene como objetivo introducir a los alumnos en la resolución de ejercicios de la materia Análisis Matemático II con el programa GeoGebra.

Para la resolución de los ejercicios se utilizarán tanto la Calculadora Gráfica (ejercicios en el plano), como la Calculadora 3D (ejercicios en el espacio). Dichas herramientas pueden ser utilizadas en su navegador web de preferencia, mediante los siguientes enlaces:

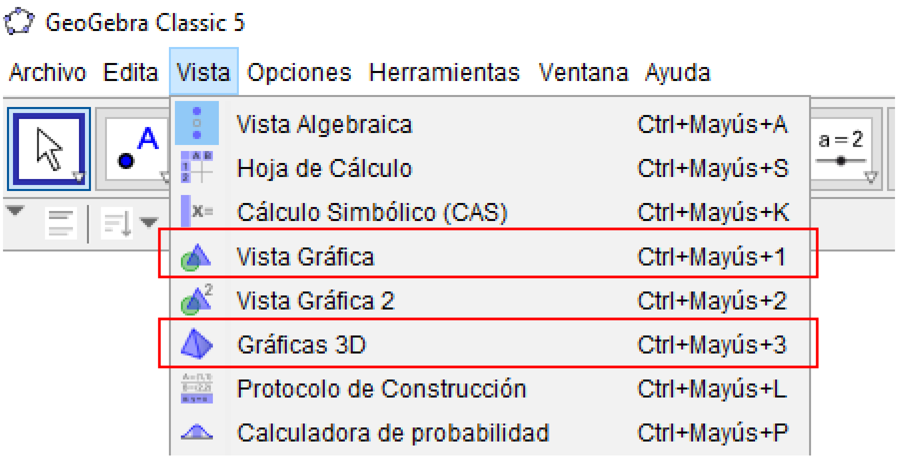
Calculadora gráfica

Calculadora 3D

También pueden descargar GeoGebra Clásico 5 (que incluye ambas herramientas) en sus computadoras, mediante el siguiente enlace:

Descargar GeoGebra

Al descargar el programa, en la opción de Vista les aparece para seleccionar Vista Gráfica (plano) o Gráficas 3D (espacio).



GeoGebra también posee aplicaciones gratuitas para celulares de cada una de sus herramientas.

Los ejercicios seleccionados para su resolución corresponden a los trabajos prácticos N.º 7 y N.º 8 de la materia. Comprenden, del TP N.º 7, el estudio de curvas en el espacio, longitud de arco, y representación de los vectores tangente, normal y binormal. Del TP N.º 8, comprenden la representación del vector gradiente, además de representación del plano tangente y recta normal a una superficie en un punto.

Esperamos que las resoluciones detalladas en el documento les sean de utilidad, no solamente para afianzar sus conocimientos en GeoGebra, sino también para ver para corroborar los resultados obtenidos en los ejercicios y ver más claramente, de forma gráfica, la representación de curvas, superficies y vectores.

TP N.º 7 – Funciones vectoriales

5. a) Sea $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\cos(\mathbf{t})\,\mathbf{i} + \mathbf{t}\,\mathbf{sen}(\mathbf{t})\mathbf{j} + \mathbf{t}\,\mathbf{k}$; para $\mathbf{0} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{3\pi}$

Demuestre que la curva se encuentra contenida en el cono $\mathbf{z^2 = x^2 + y^2}$ y trace la gráfica de la curva determinada por $\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Además, calcule $\mathbf{r}\left(\frac{4}{5}\boldsymbol{\pi}\right)$ y grafique su vector de posición.

La herramienta GeoGebra nos permite graficar curvas paramétricas tanto en el plano como en el espacio. Para realizar el siguiente ejercicio, utilizaremos la Calculadora 3D de GeoGebra. Como estamos trabajando en el espacio, se utiliza el comando:

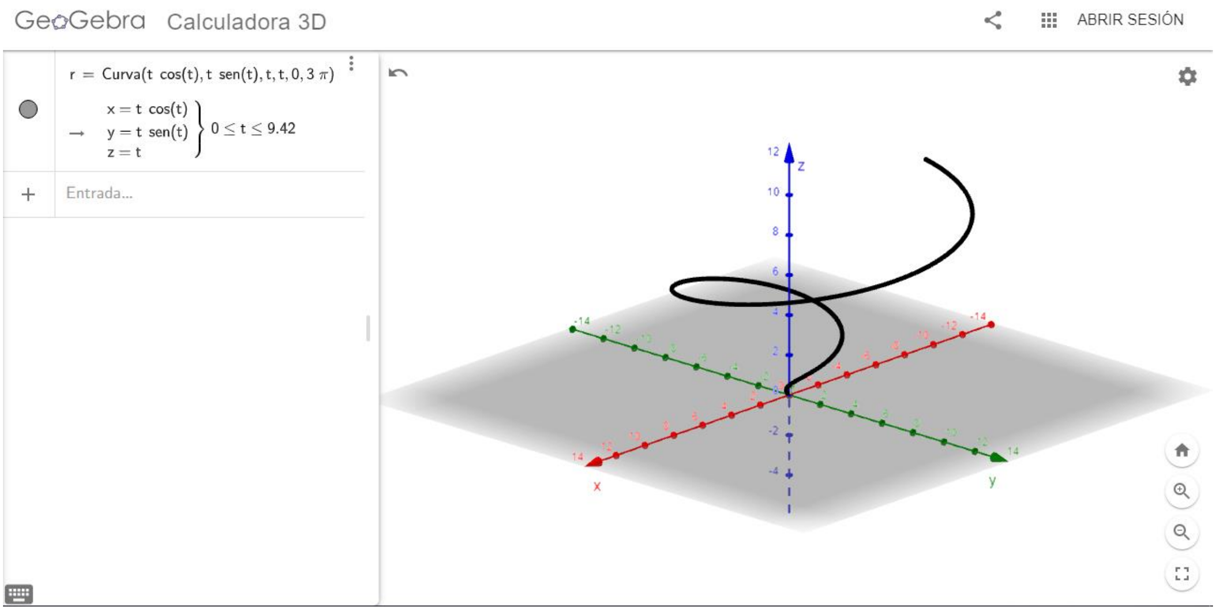
Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)

No hace falta recordarlo de memoria. Con introducir la palabra "Curva" en la parte de Entrada, aparecerá el comando como sugerencia:

Una vez seleccionada la opción, se realizan los siguientes reemplazos, en base a la expresión de $r(t)$ y los valores en los cuales se mueve la variable t:

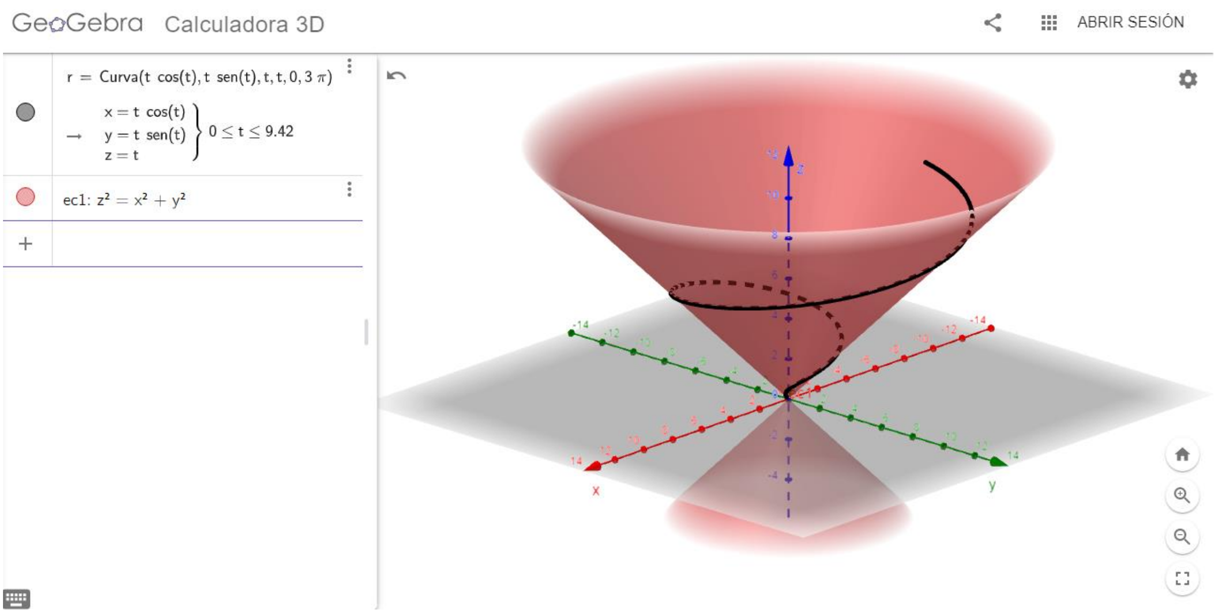
- En el lugar de la primera <Expresión>, colocar: t*cos(t)
- En el lugar de la segunda <Expresión>, colocar: t*sen(t)
- En el lugar de la tercera <Expresión>, colocar: t
- En el lugar de <Parámetro>, colocar: t
- En el lugar de <Valor inicial>, colocar: 0
- En el lugar de <Valor final>, colocar: 3π

La curva queda graficada de la siguiente manera:



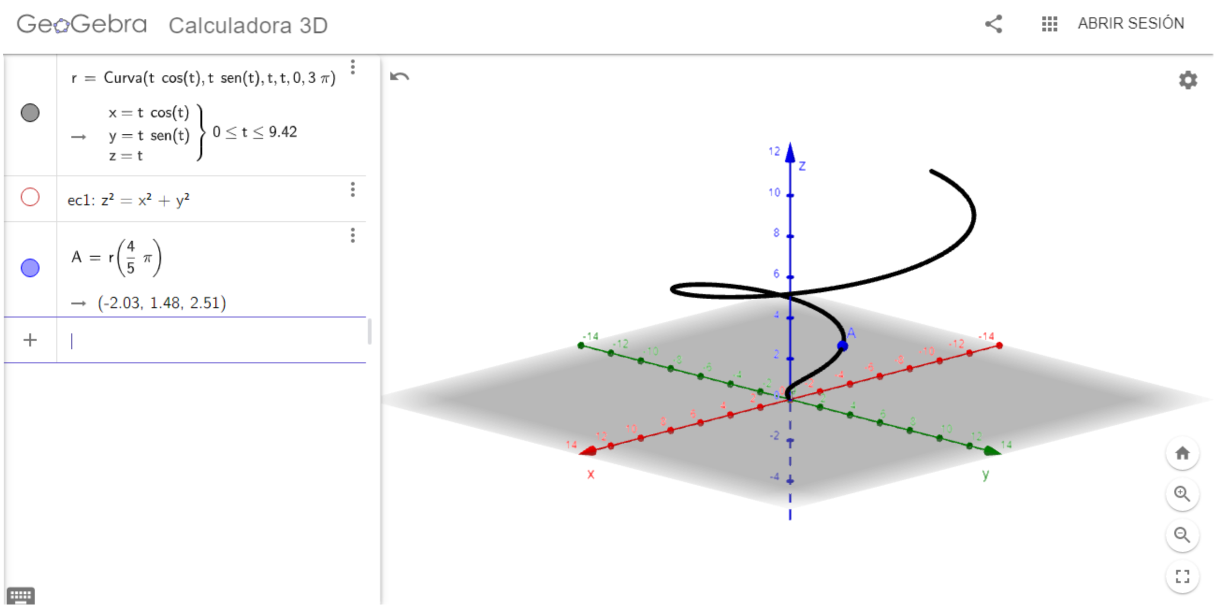
El programa, por defecto, la nombra con la letra a. Puede cambiarse el nombre de la curva, en este caso la llamamos r.

Para ver si la curva se encuentra contenida dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$, se procederá a graficar dicha superficie, ingresando su ecuación en la Entrada. Queda como resultado la siguiente gráfica:

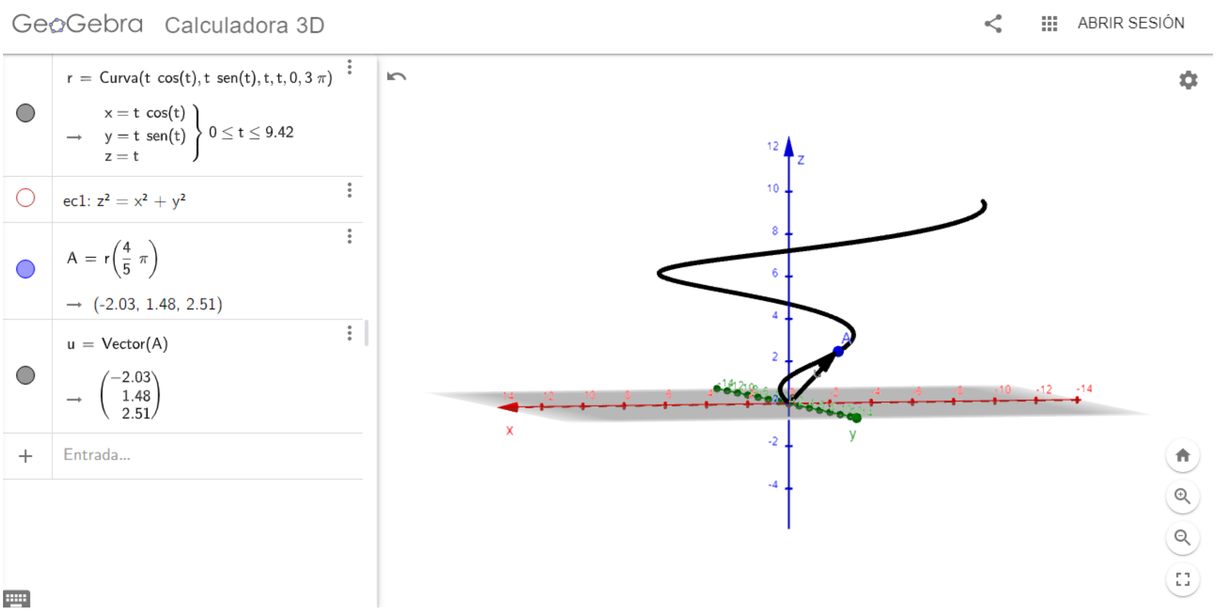


Puede apreciarse, moviendo la gráfica en distintos ángulos, que la curva r se encuentra contenida en el cono.

Para calcular el valor de la curva en $t = \frac{4}{5}\pi$, se introduce $r\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ en la Entrada (recuerden que nombramos r a la curva). El punto obtenido se llamará A.



Para graficar el vector posición, se utiliza el comando *Vector(<Punto>)*, pues el vector posición va desde el origen de coordenadas hasta el punto A= $r\left(\frac{4}{5}\pi\right)$. En el lugar de <Punto>, se coloca A. Queda el vector graficado de la siguiente manera:



8. Calcular la longitud de arco de la siguiente curva, dada en forma paramétrica:

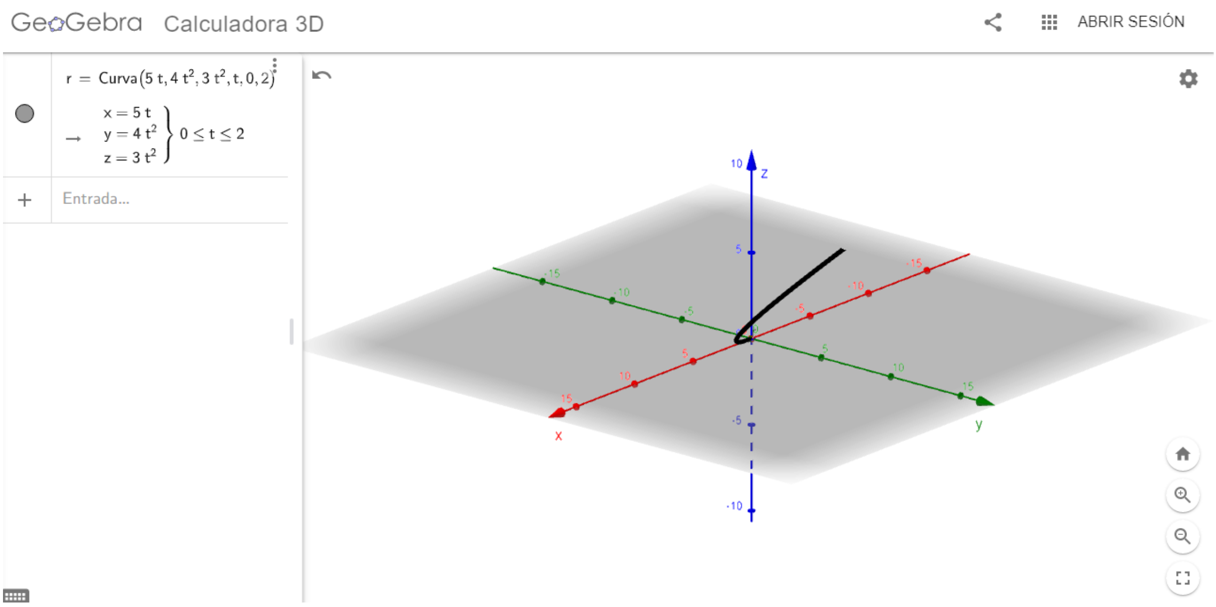
a) $\boldsymbol{x = 5t,\ \ y = 4t^2,\ \ z = 3t^2\ ;\ 0 \le t \le 2}$

Para este ejercicio utilizaremos la Calculadora 3D de GeoGebra.

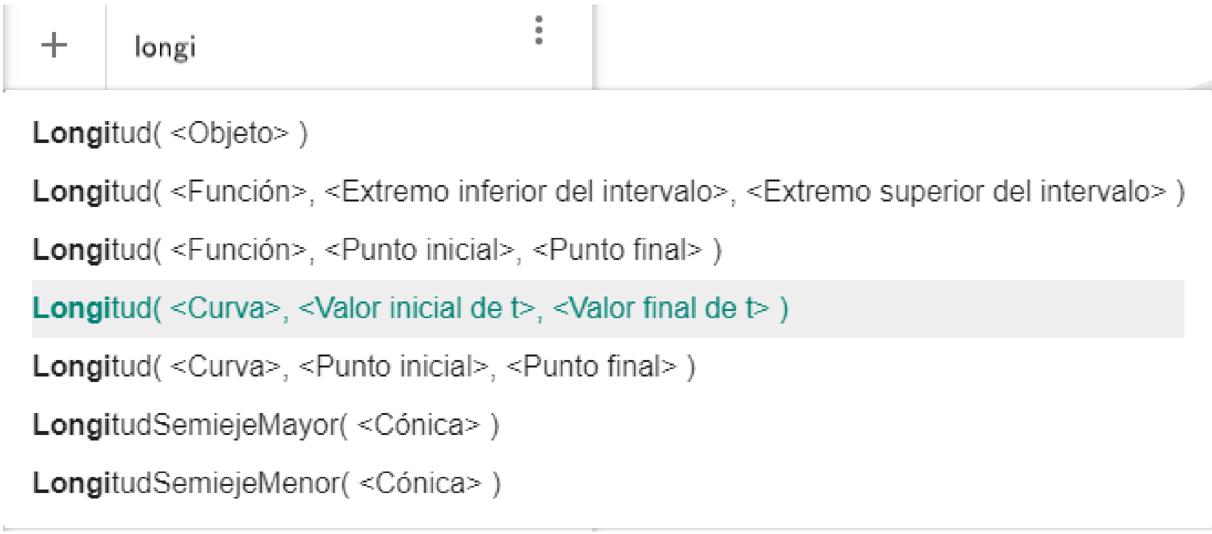
Como primer paso, se introduce la ecuación de la curva $r(t)$, utilizando el comando visto anteriormente:

Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)

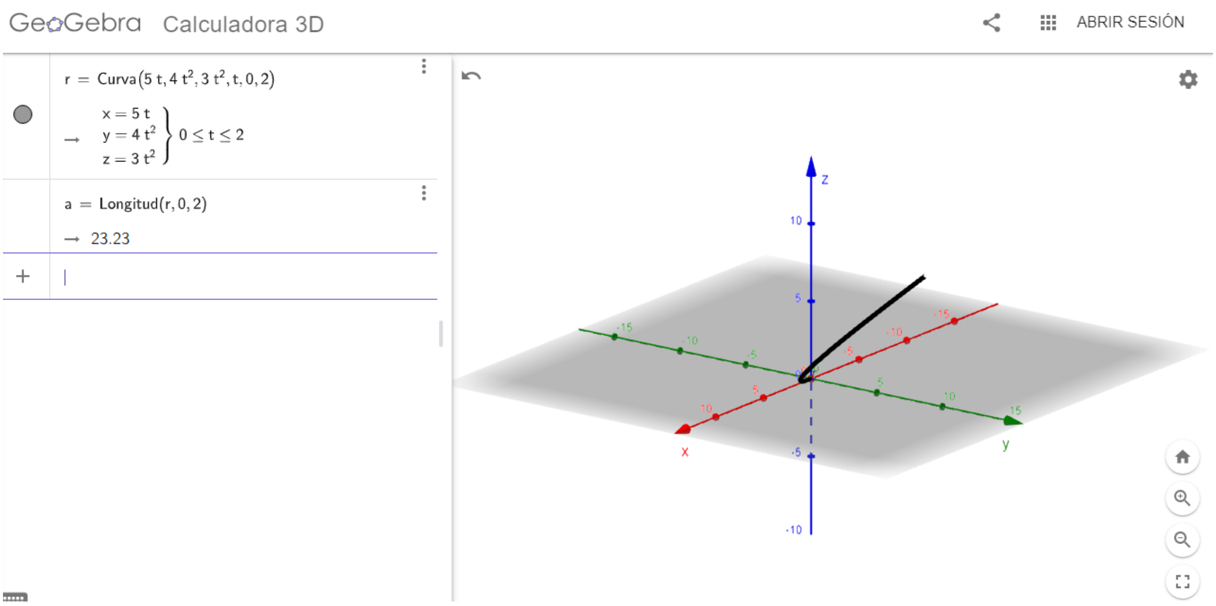
La curva queda graficada de la siguiente manera:



Para calcular la longitud de la curva en el segmento dado, se utiliza el comando *Longitud(<Curva>, <Valor inicial de t>, <Valor final de t>)*



Colocando los datos dados, se obtiene el valor de la longitud de la curva.



Esto nos sirve para comprobar si el cálculo de la longitud, realizado de forma manual, resulta correcto para los límites de t dados.

9. a) Sea la curva determinada por $\boldsymbol{r(t)\ =\ 4\ cos\ t\ i\ +\ 4\ sin\ t\ j\ +\ 3t\ k}$, para $\boldsymbol{t\ \geq\ 0}$. Trazar la curva $\boldsymbol{C}$ y determinar el vector tangente unitario y el vector normal unitario.

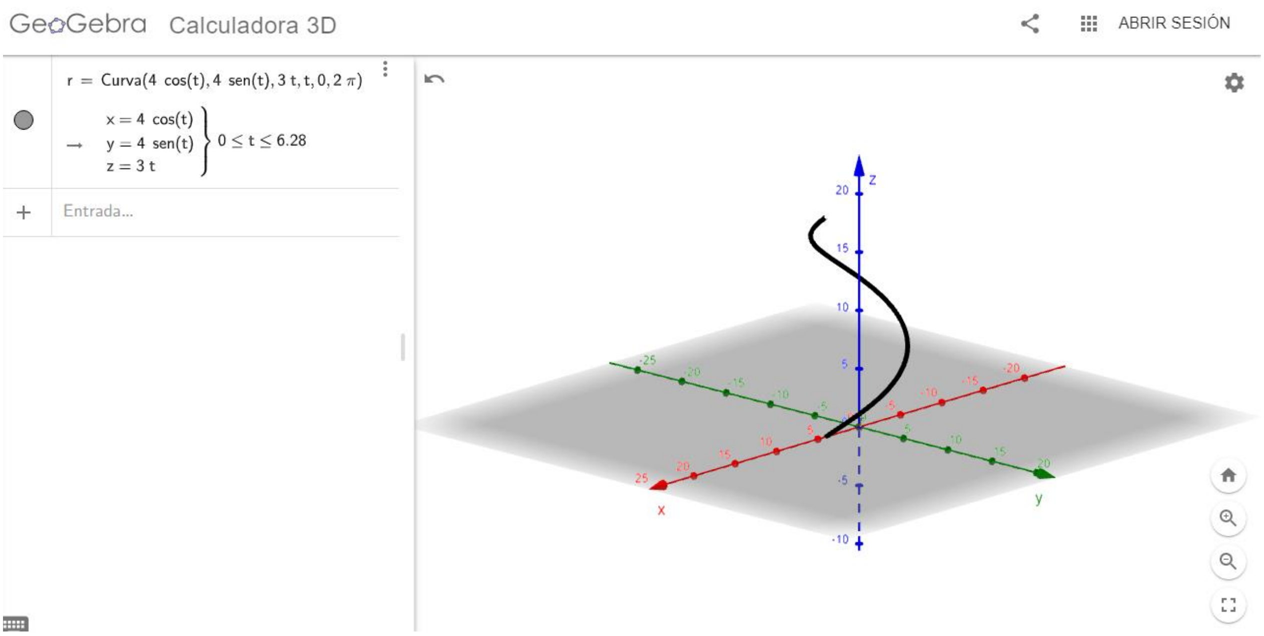
En este caso particular, el propósito de esta explicación estará centrado en ver, de forma gráfica, la representación del vector tangente unitario y el vector normal unitario de la curva para distintos valores de t.

GeoGebra no tiene comandos que calculen T y N, pero puede hacerse de una forma un poco más "manual".

Comenzamos graficando la curva (a la cual llamaremos r) usando el comando:

Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)

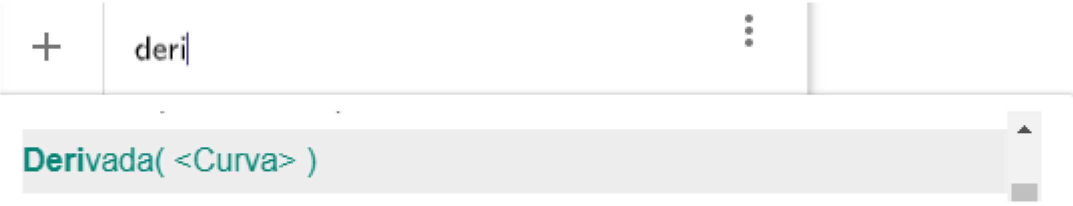
Como tenemos únicamente el dato de que $t \geq 0$, entonces tomaremos como valor inicial 0, y como valor final 2π, para representar un segmento de la curva.



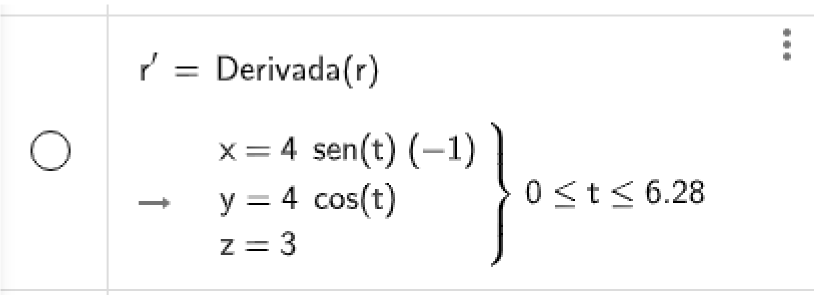
Primero se calcula la expresión de T, la cual está dada por:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

Se puede obtener la derivada de una curva paramétrica, con el comando: *Derivada(<Curva>)*



Queda la siguiente expresión (el programa lo grafica automáticamente, pero se oculta porque no hace falta la gráfica):



No es posible calcular $|r'(t)|$ con GeoGebra, así que se calcula manualmente:

$$r'(t) = -4sen(t)\ i + 4\cos(t)\ j + 3\ k$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\left(-4sen(t)\right)^2 + (4\cos(t))^2 + 3^2}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{16\ sen^2(t) + 16\cos^2(t) + 9}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Por lo cual, la expresión de T es:

$$T(t) = \frac{-4sen(t)\ i + 4\cos(t)\ j + 1\ k}{5}$$

$$T(t) = \frac{-4}{5} sen(t)\ i + \frac{4}{5}\cos(t)\ j + \frac{1}{5}\ k$$

Se introduce esta última ecuación correspondiente a T en GeoGebra, con el comando Curva que usamos con r.

$$T = \text{Curva}\left(-\frac{4}{5}\ \text{sen}(t), \frac{4}{5}\ \cos(t), \frac{3}{5}, t, 0, 2\ \pi\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\frac{4}{5}\ \text{sen}(t) \\ y = \frac{4}{5}\ \cos(t) \\ z = 0.6 \end{array}\right\} 0 \le t \le 6.28$$

Nos queda calcular la expresión de N, dada por:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

Nuevamente, la derivada de T puede calcularse con el comando *Derivada(<Curva>).*

$$T' = \text{Derivada}(T)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\frac{4}{5}\ \cos(t) \\ y = \frac{4}{5}\ \text{sen}(t)\ (-1) \\ z = 0 \end{array}\right\} 0 \le t \le 6.28$$

Calculando manualmente,

$$|T'(t)| = \sqrt{\left(-\frac{4\ cos(t)}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4\ sen(t)}{5}\right)^2}$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\frac{16\ cos^2(t)}{25} + \frac{16\ sen^2(t)}{25}}$$

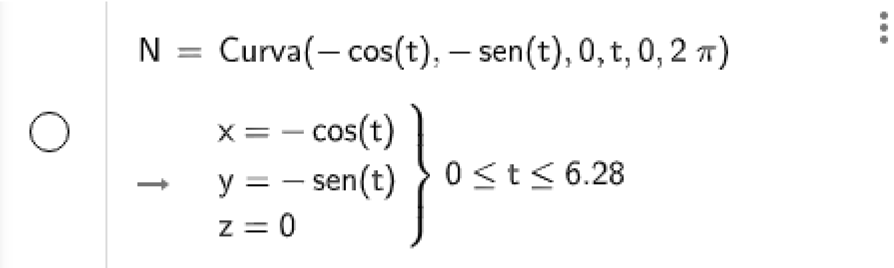
$$|T'(t)| = \frac{4}{5}$$

Se llega así a que:

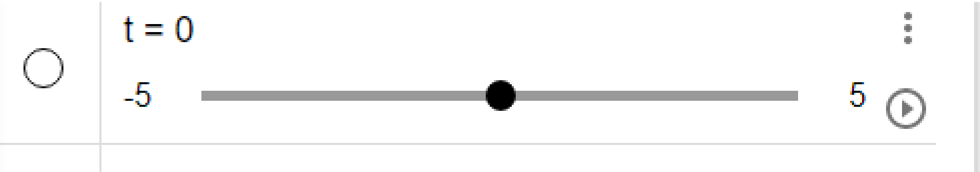
$$N(t) = \frac{-\frac{4\ cos(t)}{5} i - \frac{4\ sen(t)}{5}\ j + 0\ k}{\frac{4}{5}}$$

$$N(t) = -cos(t)\, i - sen(t)\, j + 0\, k$$

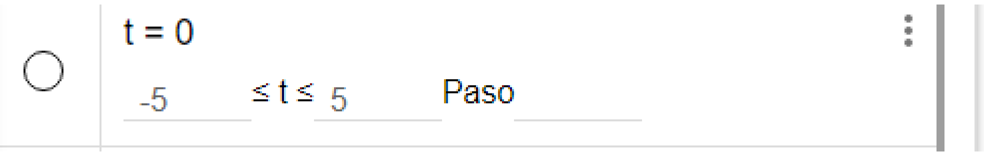
Se introduce la ecuación de N, con el comando Curva utilizado anteriormente



Llegó el momento ahora de representar los vectores tangente unitario y normal unitario, para distintos valores de t. Primero de todo, en la Entrada introducimos *t=0*, para obtener un deslizador de la variable t:

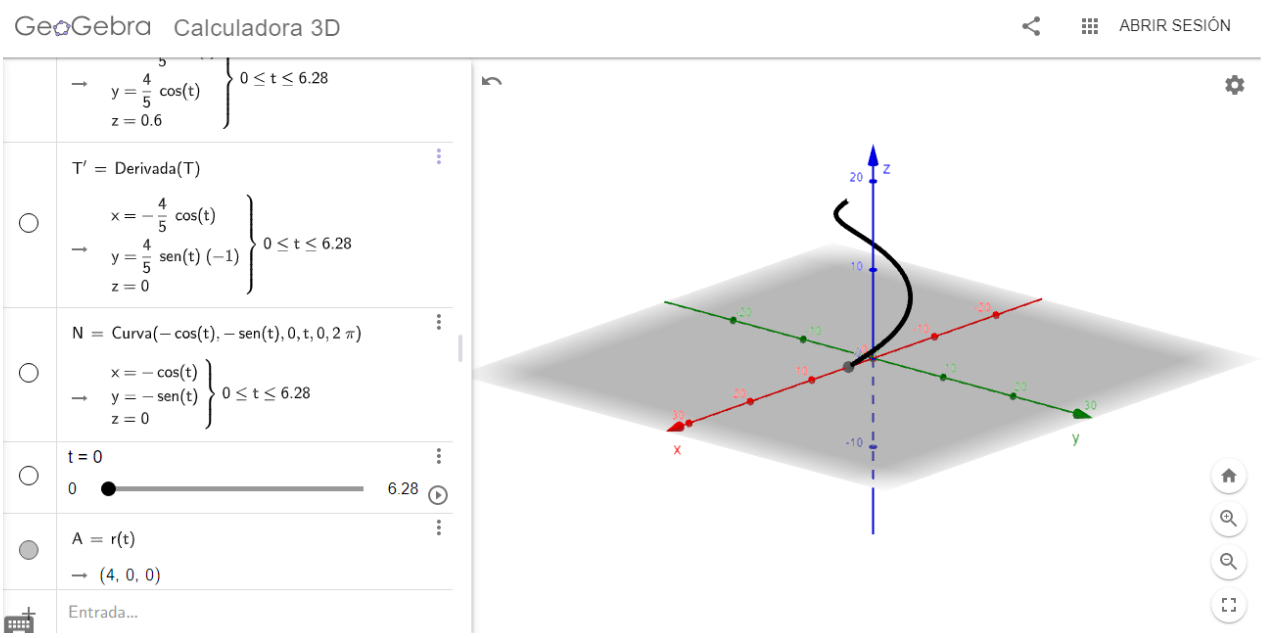


Automáticamente, dicho deslizador estará colocado entre los valores -5 y 5. Haciendo click en cualquiera de los valores límites, se podrán modificar. Colocaremos 0 y 2π, de tal forma que $0 \leq t \leq 2\pi$

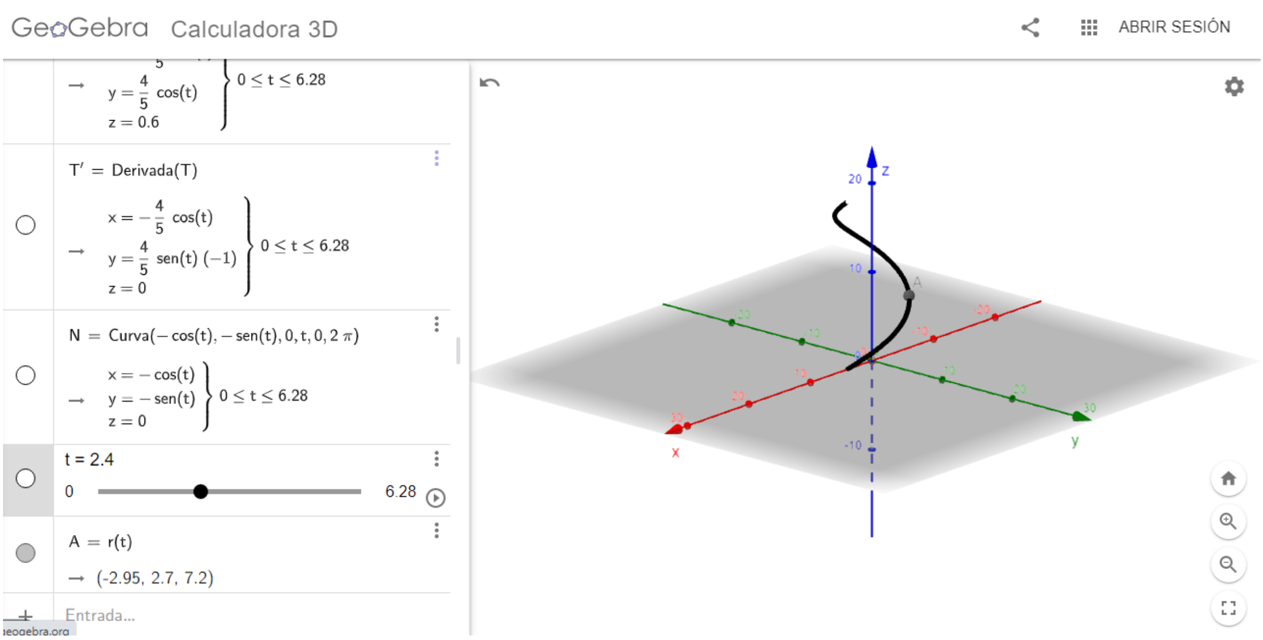


Primero introducimos el comando *r(t)*, para observar la posición sobre la curva de acuerdo a los distintos valores que tome la variable t, en el intervalo dado.

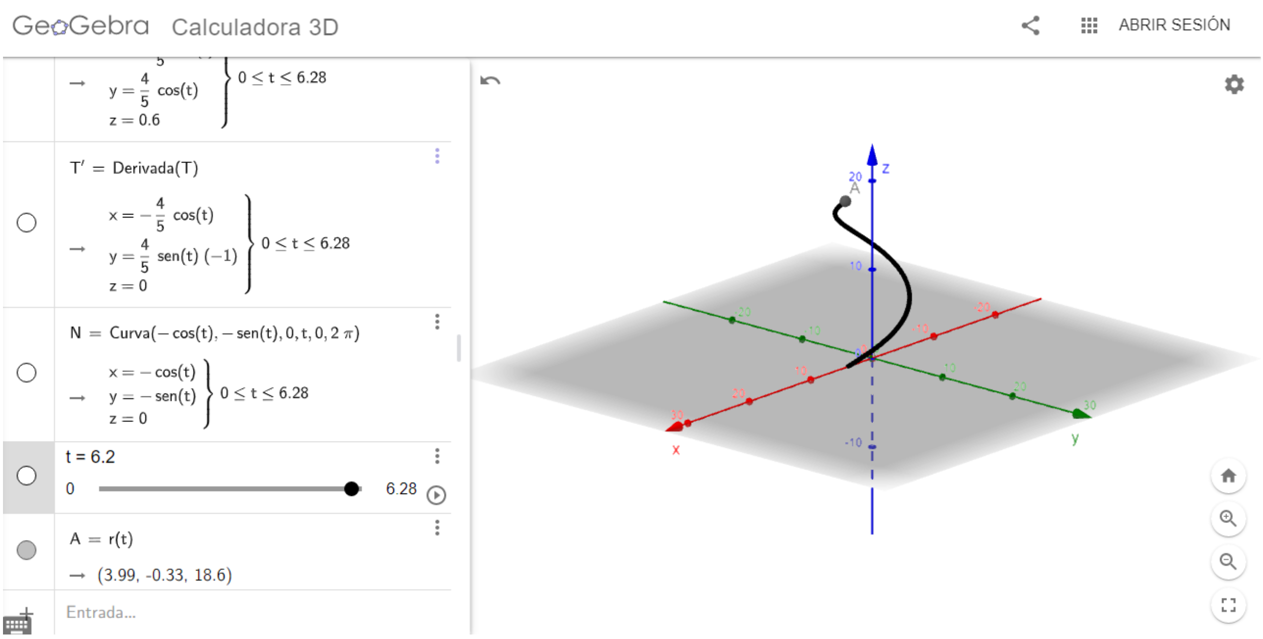
Observamos el punto para $t = 0$:



Ahora para $t = 2.4$



Y ahora para $t = 2\pi$ (aproximadamente)



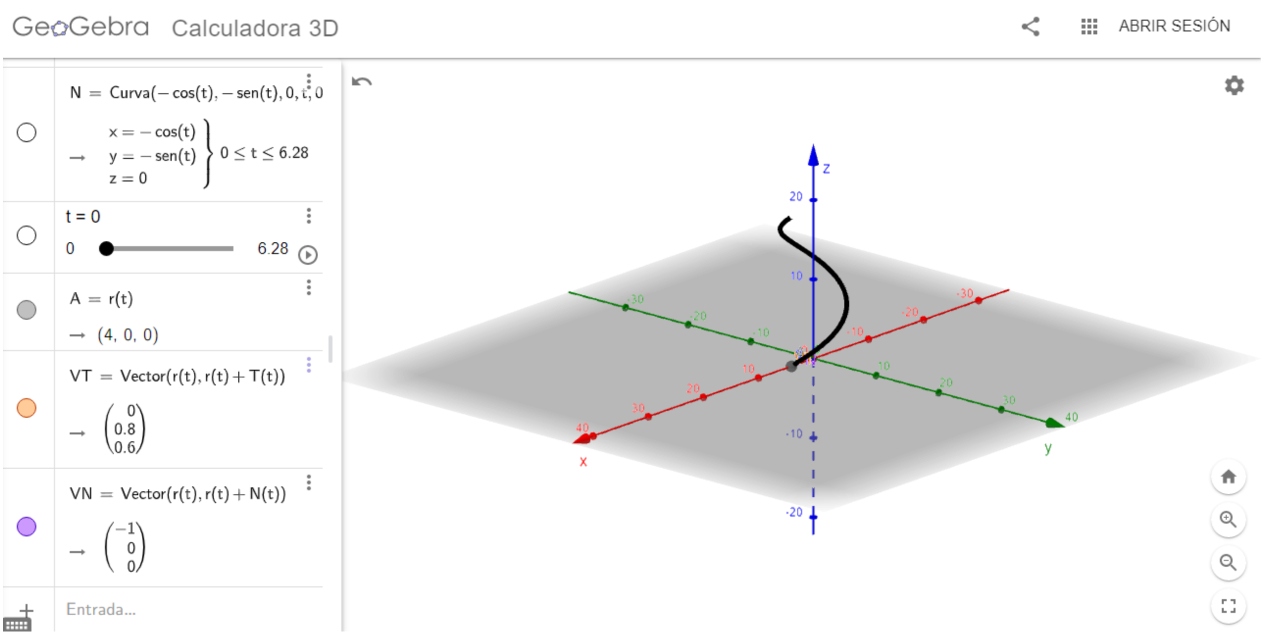
Puede verse que la posición (llamada A) se mueve sobre la curva de acuerdo al valor de t que tomemos.

Para graficar el vector tangente unitario y el vector normal unitario se utiliza el comando:

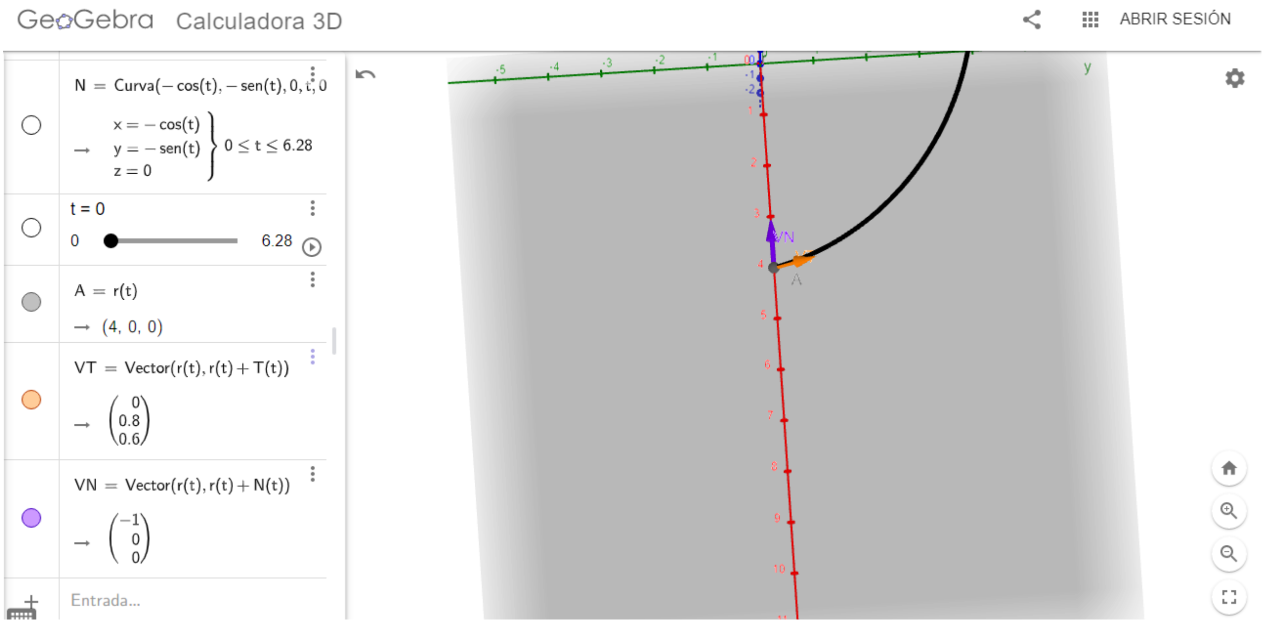
Vector (<Punto inicial>, <Punto final>)

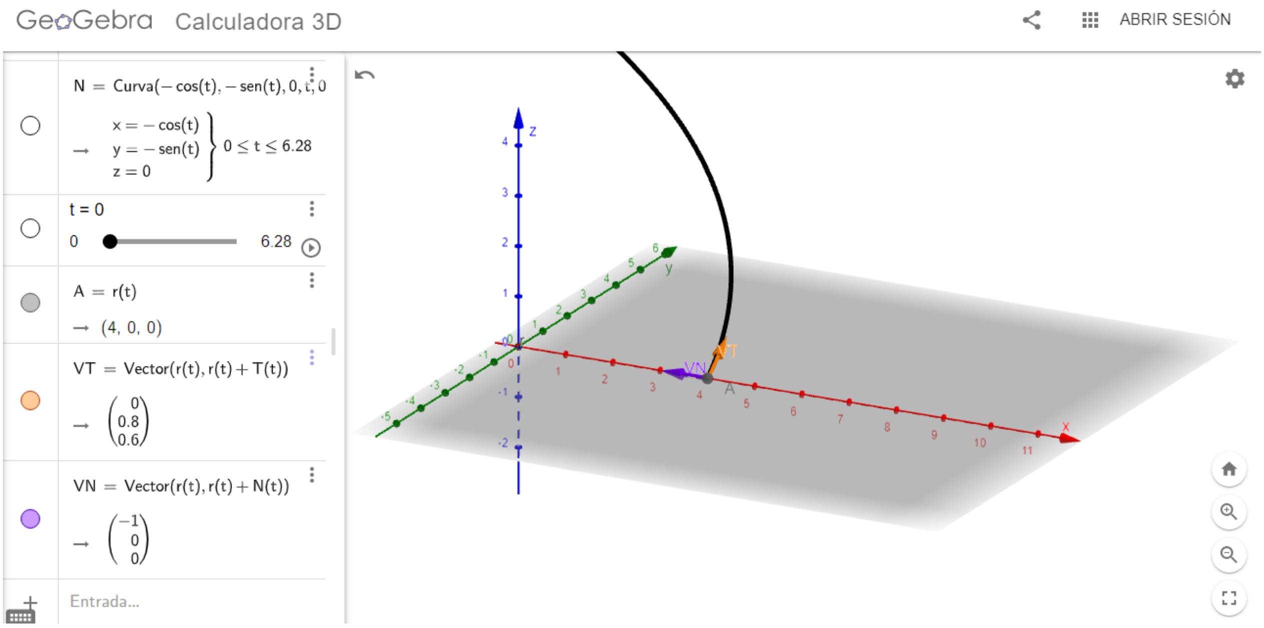
Reemplazando con lo siguiente:

- En el caso del vector tangente, se coloca *r(t)* como punto inicial y *r(t)+T(t)* como punto final.
- En el caso del vector normal, se coloca *r(t)* como punto inicial y *r(t)+N(t)* como punto final.



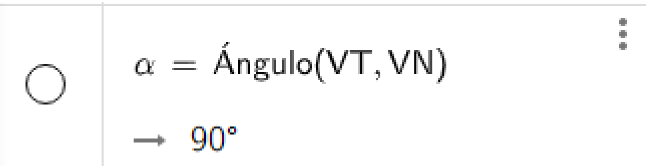
A simple vista no se ven, pero ampliando pueden observarse mejor:





Puede verse que forman un ángulo de 90º entre sí. El ángulo se calcula con el comando:

Ángulo (<Vector>, <Vector>)



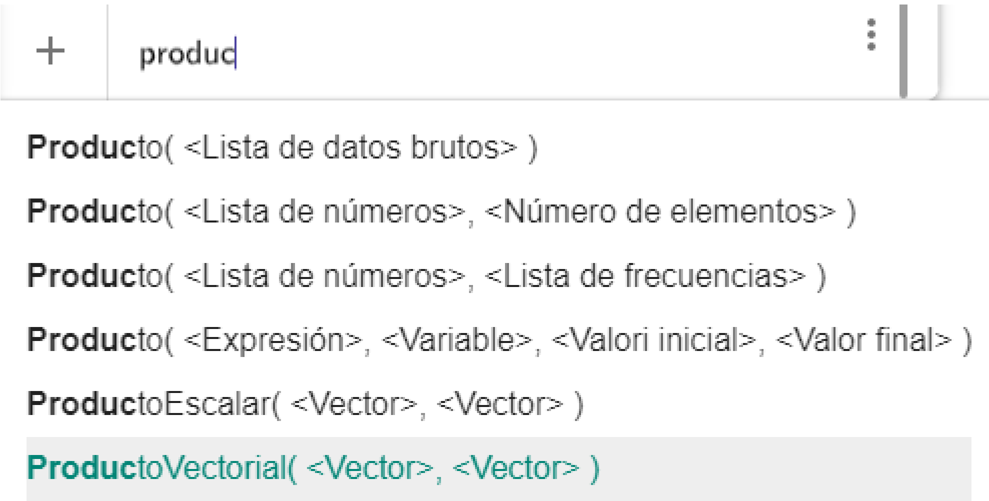
Esto va a poder verse para cualquier valor del t del intervalo que tomamos, usando el deslizador. Los vectores se irán moviendo junto con el punto.

Adicionalmente, aunque el ejercicio no lo enlista, representaremos el vector binormal, cuya expresión es:

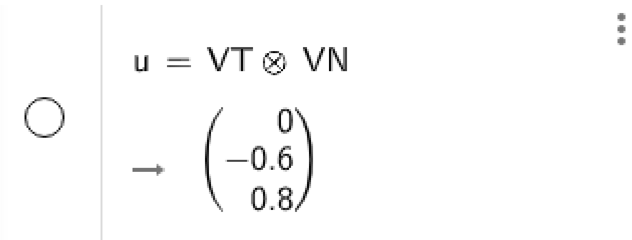
$$B(t) = T(t) \wedge N(t)$$

Primer se calcula el producto vectorial entre los vectores VT y VN, con el comando:

ProductoVectorial (<Vector>, <Vector>)



Queda calculado de la siguiente forma (no lo representamos todavía). Los valores son para $t = 0$, cambian de acuerdo al valor de t.

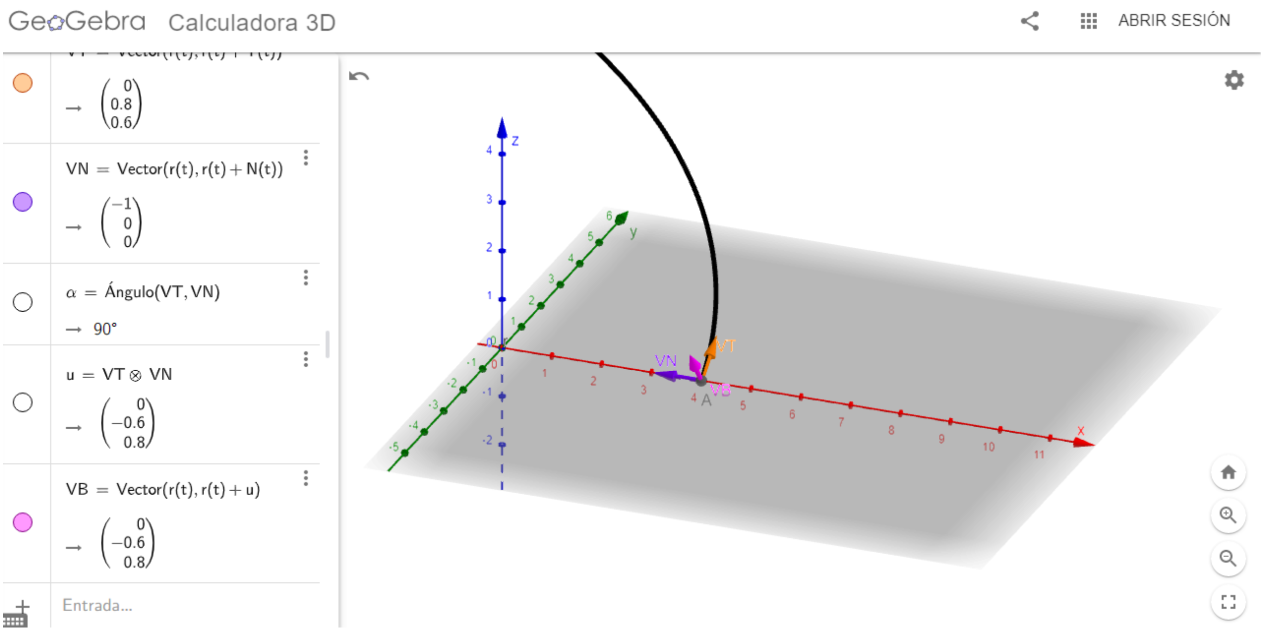


Luego, el vector binormal lo representamos con el comando:

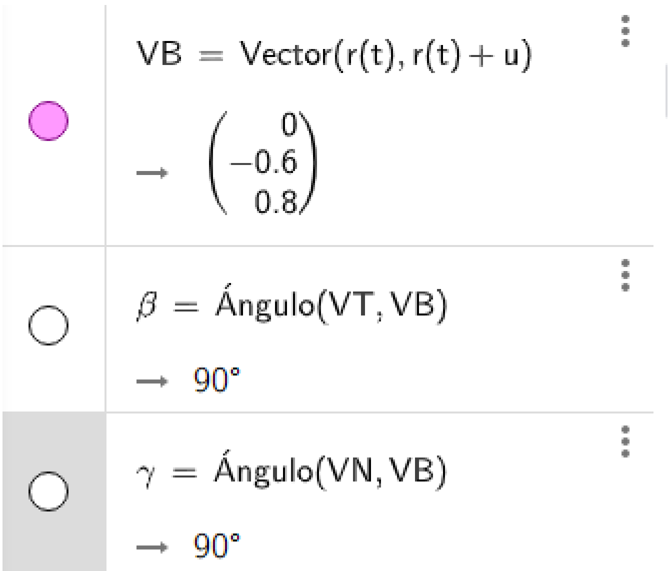
Vector (<Punto inicial>, <Punto final>)

Se coloca *r(t)* como punto inicial y *r(t)+u* como punto final, donde u representa el producto vectorial obtenido anteriormente.

Se observa la representación del vector binormal junto al vector unitario tangente y el vector unitario normal, para un cierto valor de t sobre la curva:



Puede verse que el vector VB es normal tanto a VT como a VN.



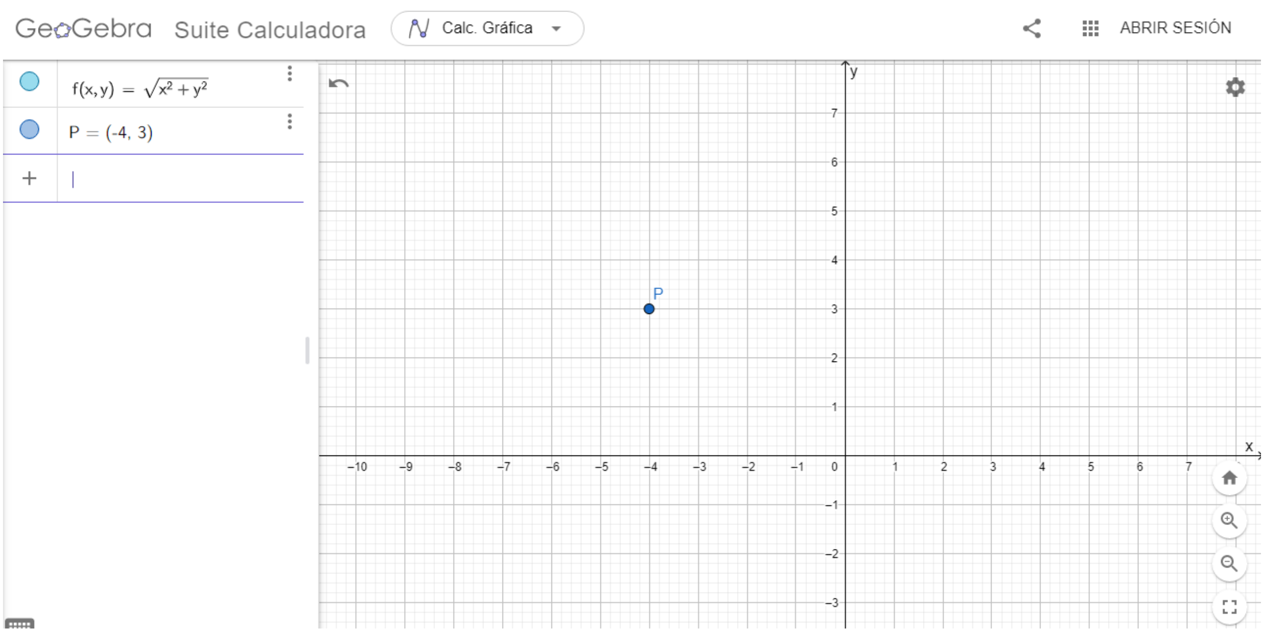
TP N.º 8 – Derivadas direccionales – Planos tangentes y rectas normales

1. Encontrar el gradiente de la función dada en el punto indicado y representarlo gráficamente:

$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \boldsymbol{P=(-4,3)}$

A diferencia de los casos anteriores, aquí utilizaremos la Calculadora de GeoGebra.

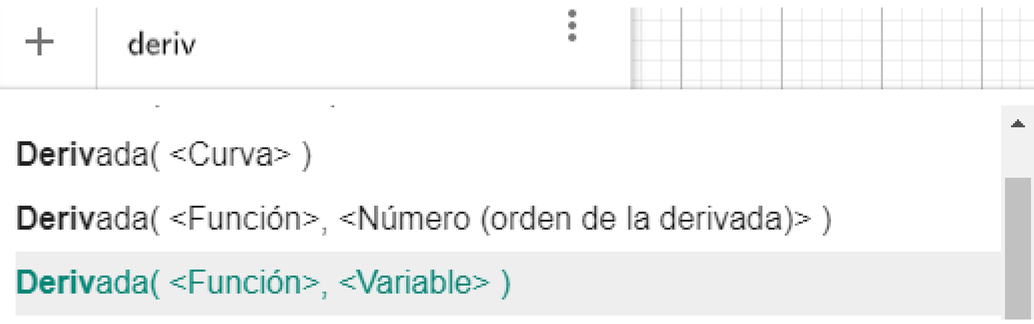
Como primer paso, se introducen la función dada y el punto P en la entrada. GeoGebra va a representar el punto en el plano, no así la función.



El gradiente de una función $f(x,y)$ está dado por:

$$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ i+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\ j$$

Se obtienen las derivadas parciales utilizando el comando: *Derivada(<Función>, <Variable>)*



Calculando, quedan de esta manera:

$a(x,y) = \text{Derivada}(f,x)$

$\rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$b(x,y) = \text{Derivada}(f,y)$

$\rightarrow \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Para obtener el gradiente en el punto dado, se calcula *a(P)* y *b(P).*

$c = a(P)$

$\rightarrow -0.8$

$d = b(P)$

$\rightarrow 0.6$

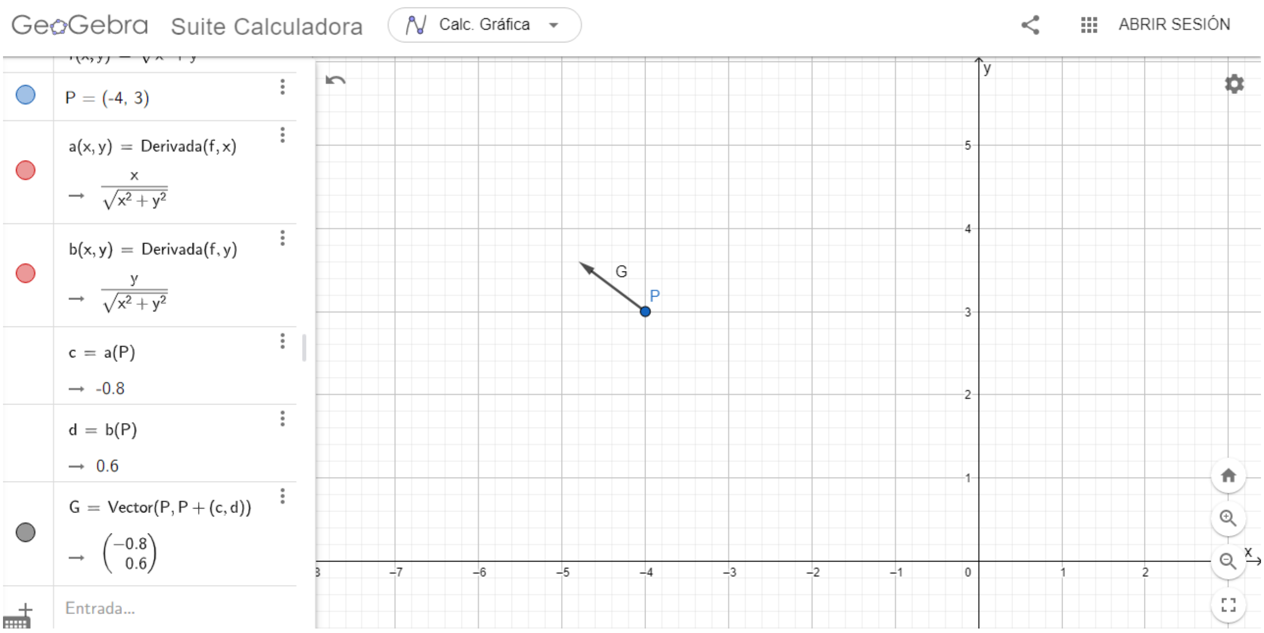
Es decir, que el valor del gradiente en el punto $P = (-4,3)$ es:

$$\nabla f(-4,3) = -0.8\, i + 0.6\, j = (-0.8, 0.6)$$

Finalmente, se representa el vector gradiente con el comando:

Vector (<Punto inicial>, <Punto final>).

El punto inicial será P, y el punto final será $P + (-0.8,0.6)$. Esto es porque el vector gradiente parte del punto P.

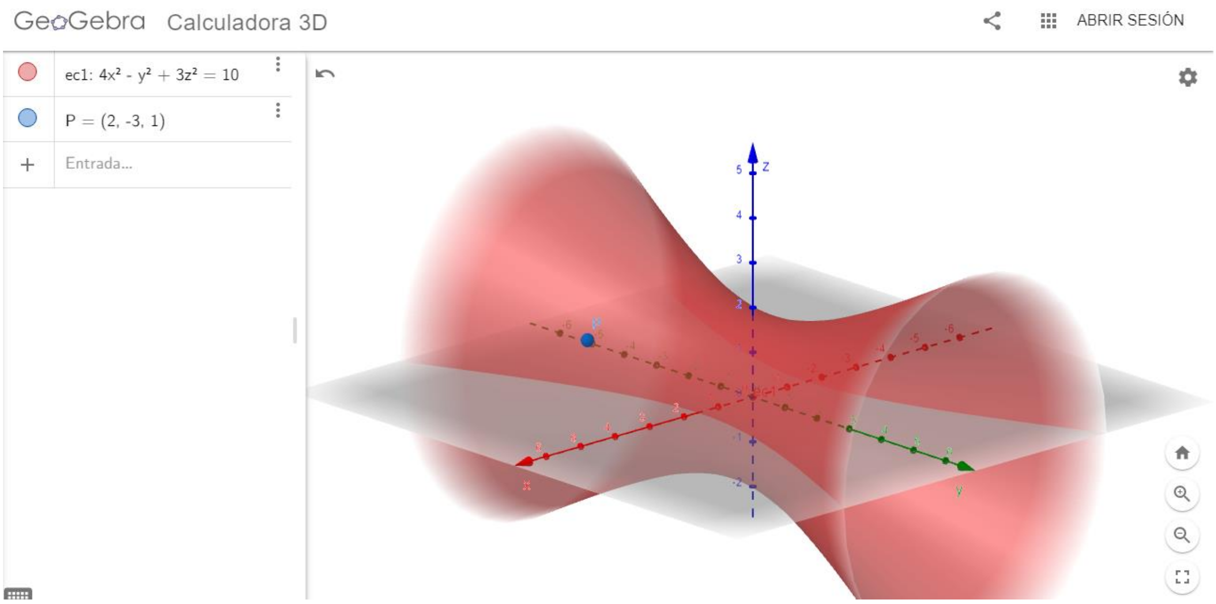


8) Obtener ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto indicado (en cada caso verificar previamente que el punto indicado pertenece a la superficie):

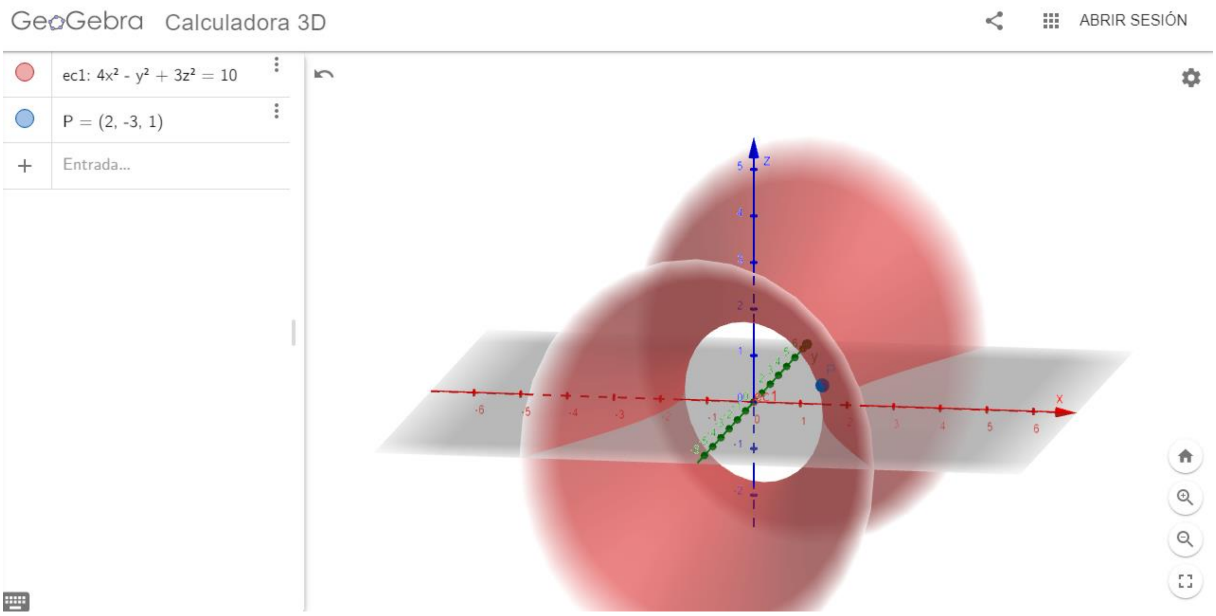
$\boldsymbol{4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10}, \qquad \boldsymbol{P = (2, -3, 1)}$

Para este ejercicio, volveremos a utilizar la Calculadora 3D de GeoGebra.

Como primer paso, representamos tanto la superficie como el punto P.

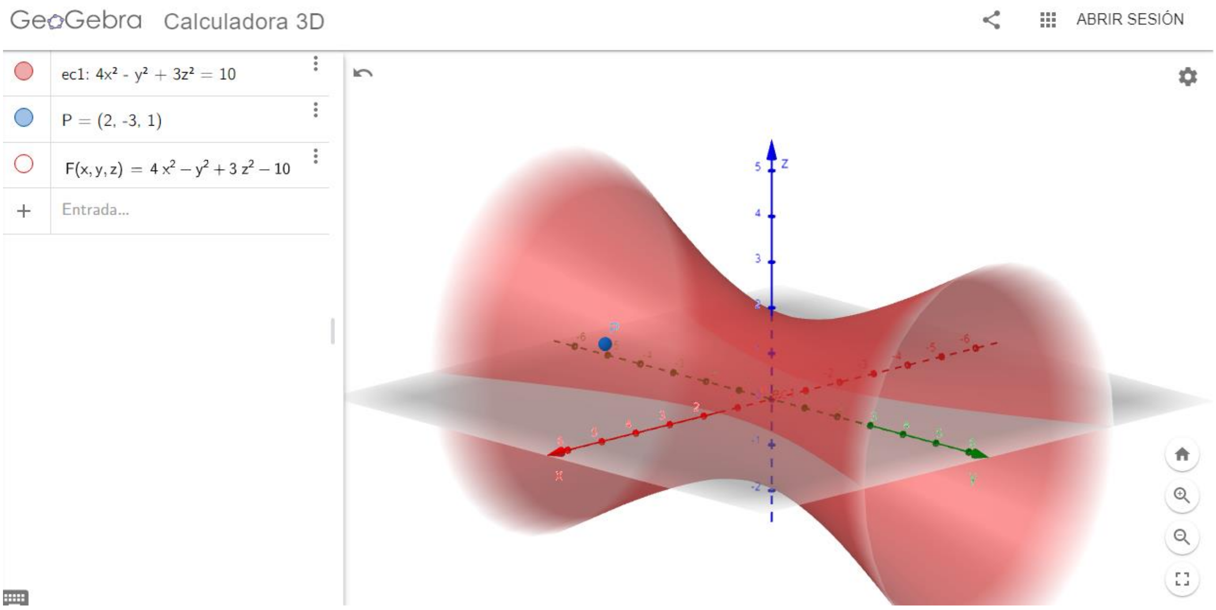


La superficie es un hiperboloide de una hoja. Si se mueven los ejes, puede observarse más claramente que el punto P pertenece al hiperboloide (aun así, siempre se recomienda hacer la demostración de forma manual).



Tenemos que hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en el punto P dado.

Expresaremos la superficie como $F = 4x^2 - y^2 + 3z^2$, de tal forma que se cumpla que la gráfica sea $F(x, y, z) = 0$.

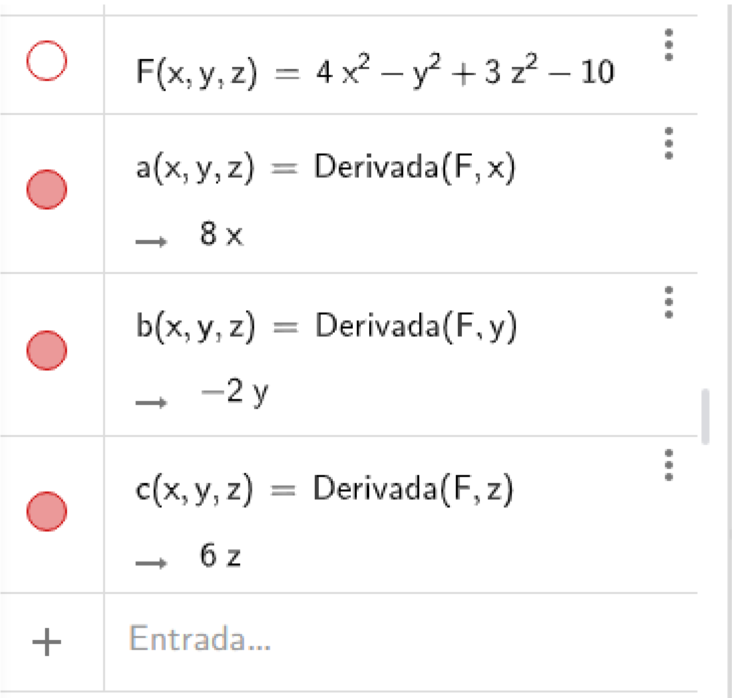


El plano normal a la superficie en un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ está dado por la ecuación:

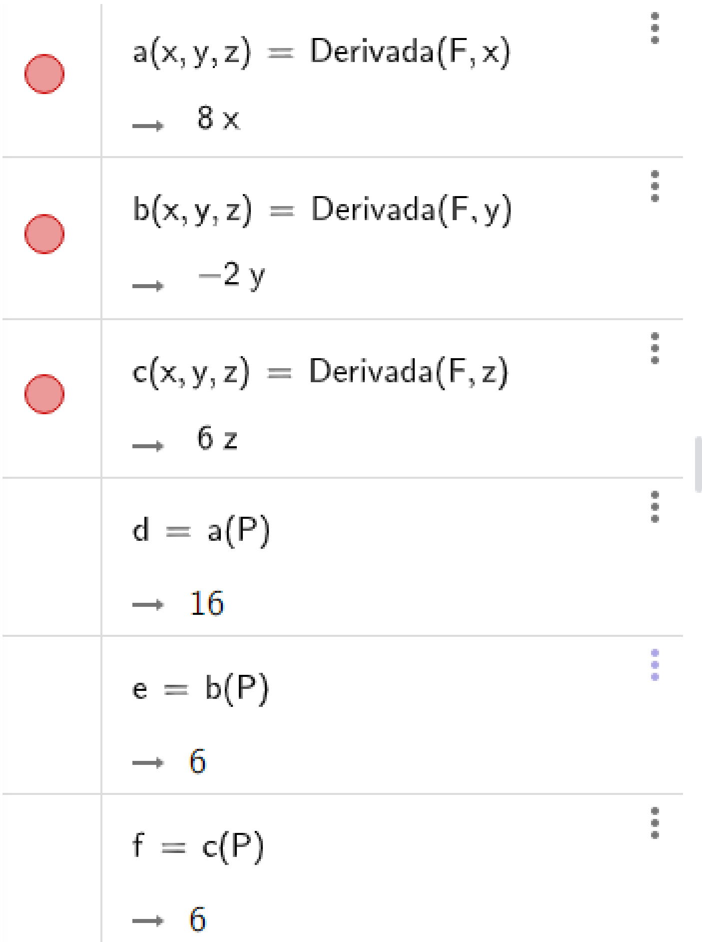
$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

En el caso dado, $(x_0, y_0, z_0) = (2, -3, 1)$

Se calculan las derivadas parciales de $F(x, y, z)$ con el comando *Derivada(<Función>, <Variable>)*

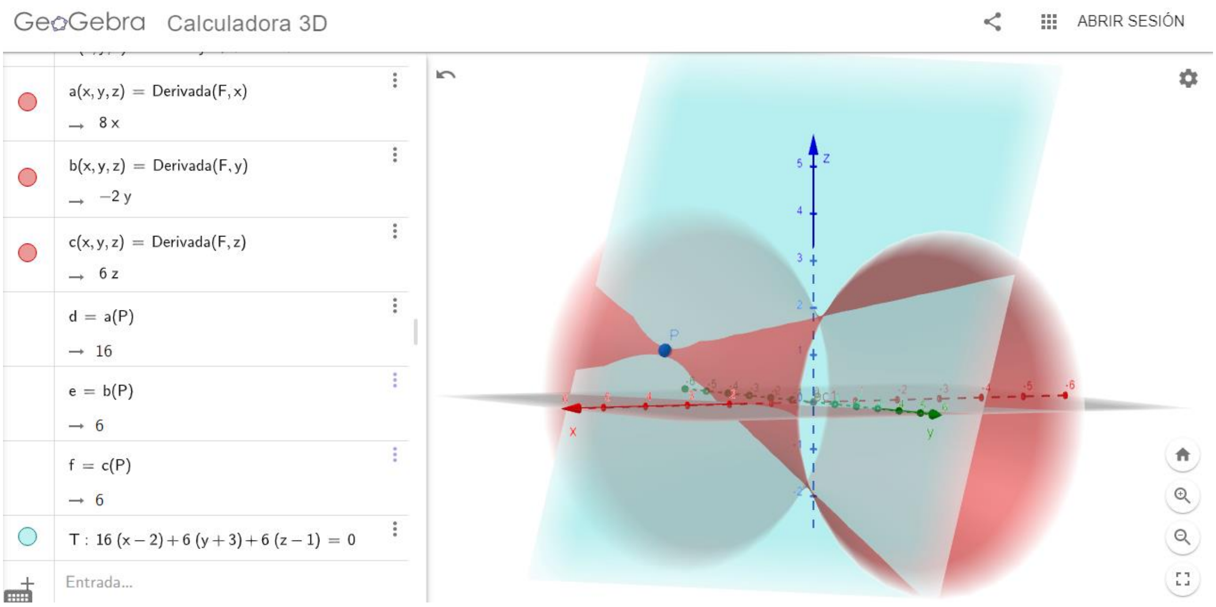


Se calcula el valor de cada derivada parcial en P:



Finalmente, se representa el plano con el comando:

$$16\,(x-2)+6\,(y+3)+6\,(z-1)=0$$

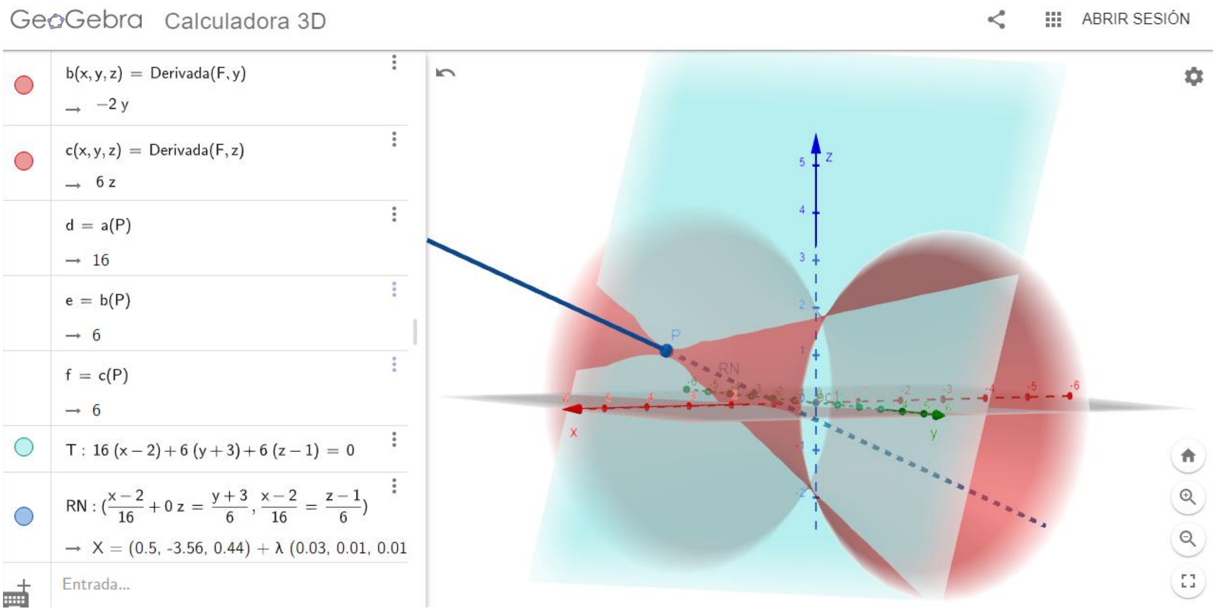


La recta normal a la superficie en un punto (x_0, y_0, z_0) está dada por la ecuación:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}=t$$

Por lo cual, en el caso dado, lo expresaremos en GeoGebra como:

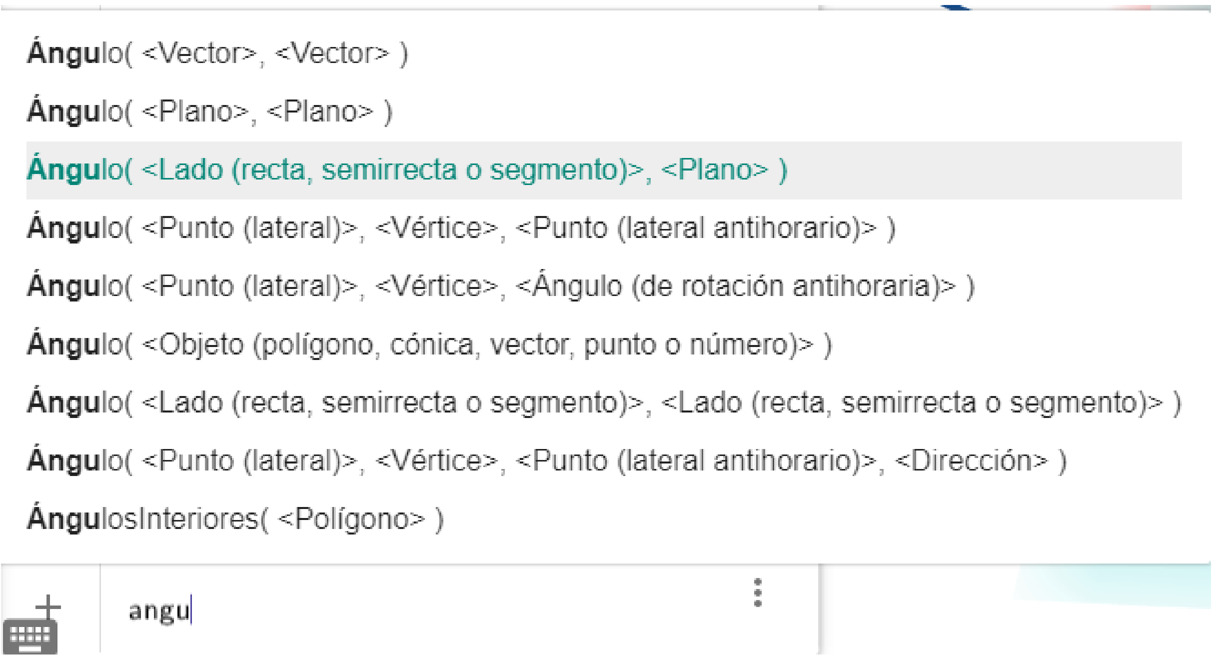
$$\frac{x-2}{16}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-1}{6}$$

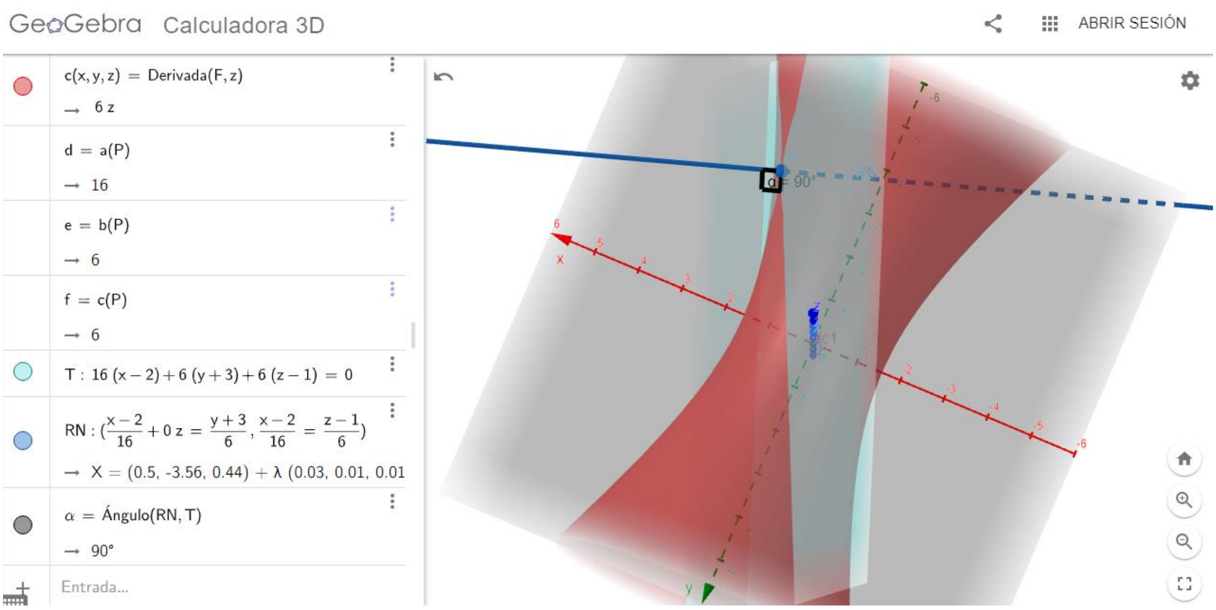


Utilizando el comando:

Ángulo (<Lado (recta, semirrecta o segmento)>, <Plano>)

Puede verse que la recta es también normal al plano tangente a la superficie en P.





El uso de la herramienta GeoGebra en ejercicios como este, nos sirve para observar de forma gráfica el plano tangente y la recta normal a una superficie en un punto específico, a partir de las expresiones obtenidas.