



Laboratorio de Matemática

Guía para realizar los ejercicios del Laboratorio de Matemática

“Colegio Secundario: Matemática”

Envío por mail: matematica@frlp.utn.edu.ar

Web: matematica.frlp.utn.edu.ar

Canal de Youtube:

<https://www.youtube.com/channel/UCG8BiYo4eu38wa6-99uAbag>

Directora del Laboratorio: Ing. Viviana Cappello

Ayudante: Ing. Rocío Gartxo Vo

Objetivos del Laboratorio de Matemática

- Facilitar la incorporación de los conceptos de álgebra y análisis matemático con el uso de GeoGebra, un software matemático.
- Avanzar en el conocimiento, dándole mayor significado concreto a los temas vistos en las clases presenciales convencionales, pudiendo vivenciar desde la simulación los problemas planteados.

Metodología de trabajo

Los alumnos deberán asistir al Laboratorio a realizar los ejercicios de las correspondientes a la materia Álgebra y Geometría Analítica. El seguimiento del aprendizaje del alumnado será asistido por los docentes de ciencias básicas encargados del Laboratorio.

Es condición necesaria para los alumnos que opten por la aprobación directa, que tengan mínimo 3(tres) asistencias por parcial al Laboratorio de Matemática. Para los alumnos que opten por el régimen regular dicha condición se fija en 1 (una) por parcial.

Los docentes encargados del Laboratorio de Matemática llevarán un registro de dichas asistencias y las informarán a los profesores de cada comisión respectivamente. Los trabajos prácticos específicos serán publicados al inicio del ciclo lectivo.

¿Qué es GEOGEBRA?

Se trata de un software libre de matemática. Ofrece representaciones diversas de los objetos: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos vinculadas.

Página web de inicio del programa

<https://www.geogebra.org>

Descargar GEOGEBRA

Podemos descargarlo en el siguiente enlace (seleccionemos la opción correspondiente al dispositivo pc, tablet o móvil)

<https://www.geogebra.org/download>

Es posible que el programa nos pida que instalemos una aplicación que se denomina Java. Es necesario instalar esta aplicación para que el programa funcione.

Comandos para el uso de GEOGEBRA

<https://wiki.geogebra.org/es/Comandos>

Números Reales

1. Interpreta y representa las siguientes expresiones

- a) $x \in (-3, \infty)$
- b) $x \in (-2, 5]$
- c) $x \in (-\infty, 8]$
- d) $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$
- e) $x \in (-10, 5) \cap (-1, \infty)$

2. Resolver las siguientes inecuaciones:

- a) $2x - 3 \geq 7$
- b) $|x - 2| \leq 3$
- c) $\frac{3}{2}x > 5$

3. Verificar si las siguientes igualdades se cumplen:

- a) $7 + (5 + 10) = (7 + 5) + 10$
- b) $12 + 2$ es un número natural
- c) $(5 \cdot 2) \cdot 6 = 5 \cdot (2 \cdot 6)$
- d) $-2^8 = (-2)^8$

e) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

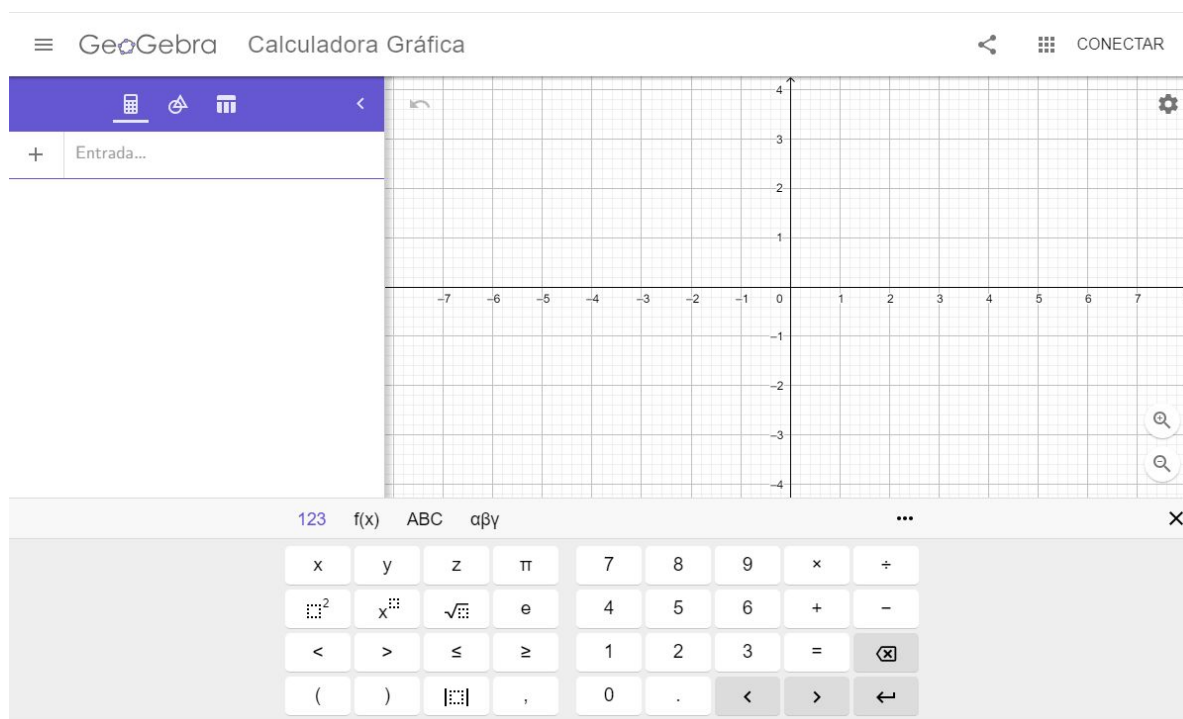
f) $\sqrt[9]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[27]{5}$

g) $(2^3)^5 = 2^{15}$

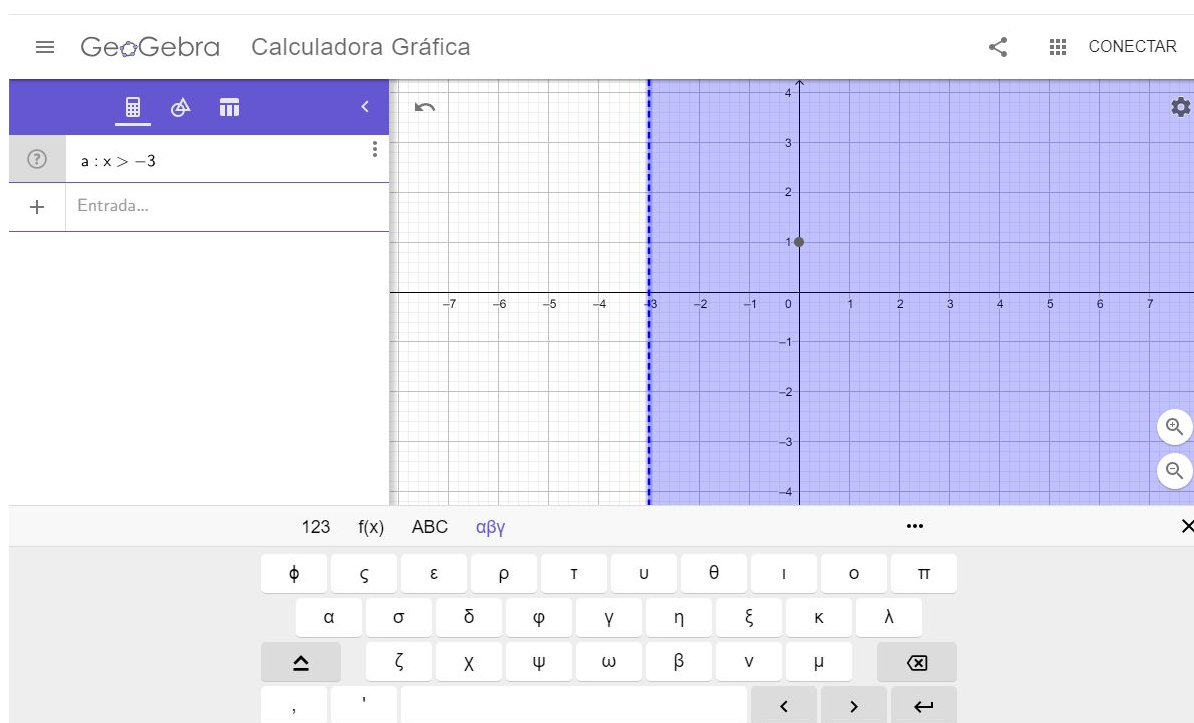
h) $5^8 : 5^4 = 5^{8-4}$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Para los ejercicios de esta unidad utilizaremos la calculadora que se encuentra en la parte inferior.



En la siguiente imagen se muestra un ejemplo de cómo resolver los ejercicios 1 y 2.



Funciones

1. Graficar las siguientes funciones

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

2. Hallar el dominio de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + 2}$$

a)

b) $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 5$

c) $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

4. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq -2 \\ x^2 - 4 & -2 < x < 3 \\ x^2 - 12x + 32 & 3 \leq x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 7 & x \leq -2 \\ 1 - x & -2 < x \leq 3 \\ x - 5 & 3 < x \end{cases}$$

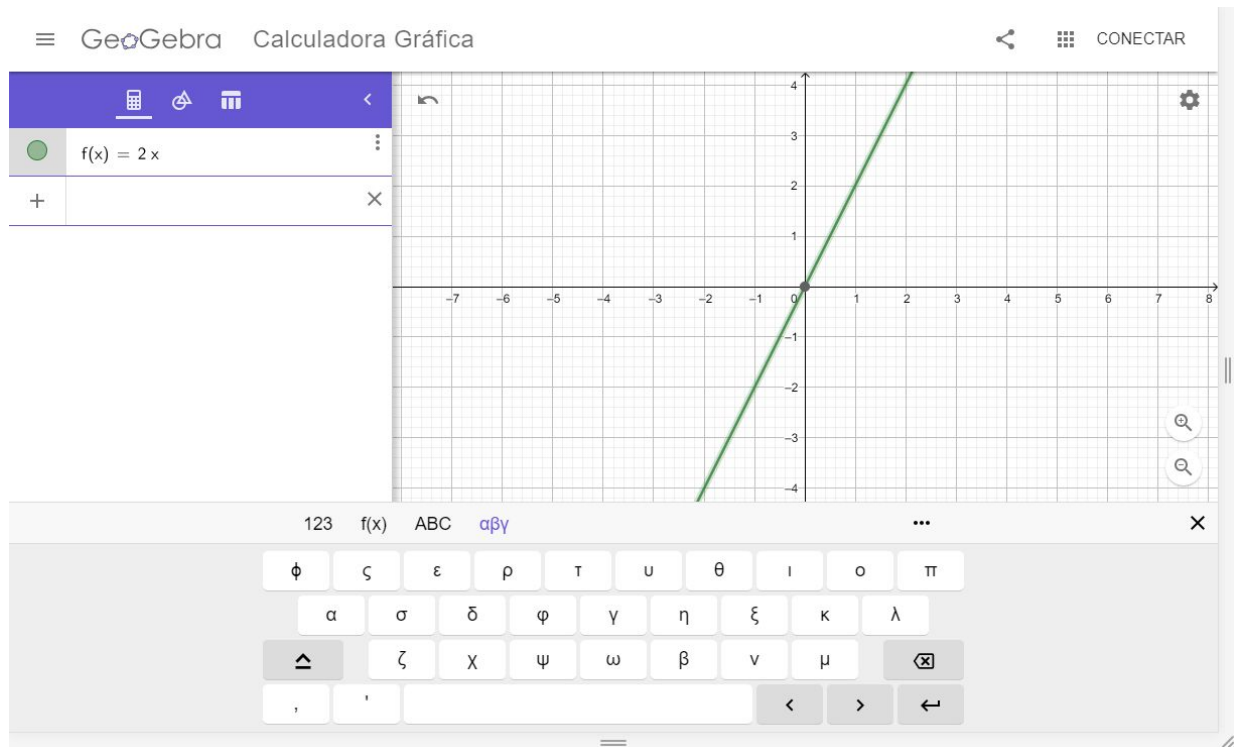
$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & 1 < x \end{cases}$$

Calcular: $f(-2)$, $f(3)$, $f(0)$, $g(-2)$, $g(-4)$, $g(5)$, $h(0)$, $h(1/2)$, $i(1)$, $i(0)$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Las funciones se pueden graficar escribiéndolas en la “Calculadora”. Una vez que fue escrita la podrás visualizar en la pantalla.



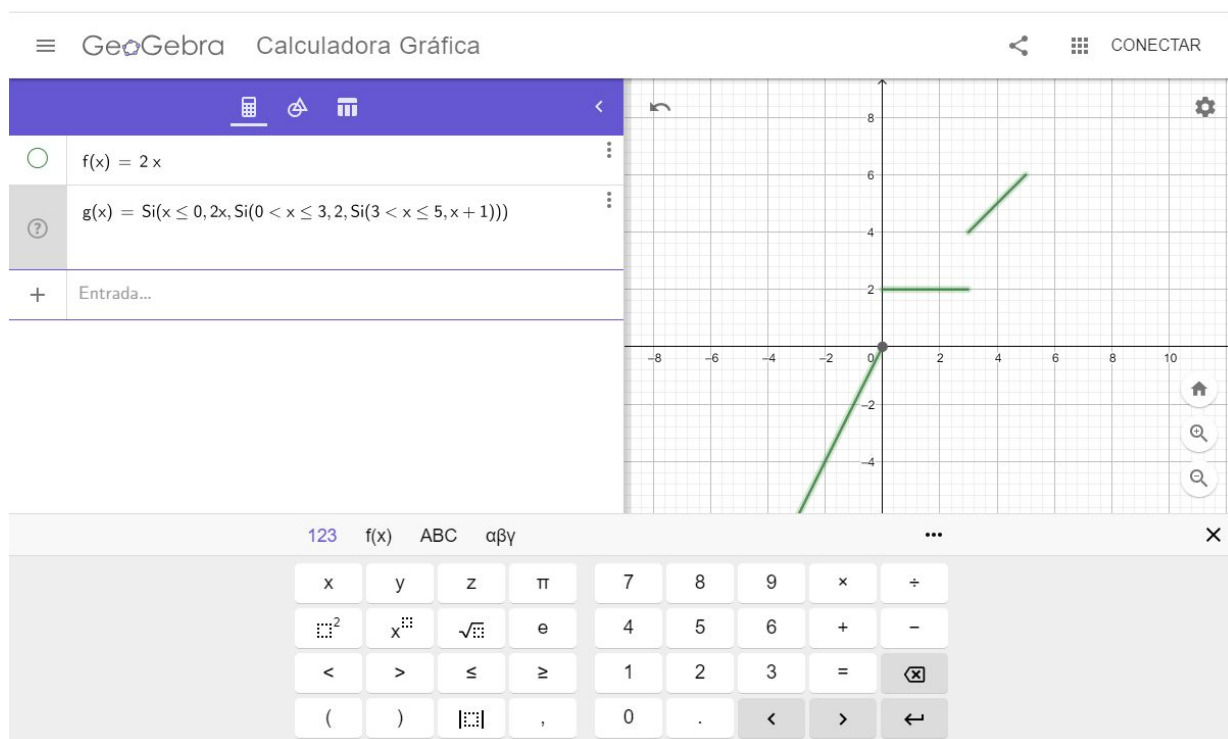
Para escribir una función por partes, se realiza de la siguiente manera:

Por ejemplo la función dada por:

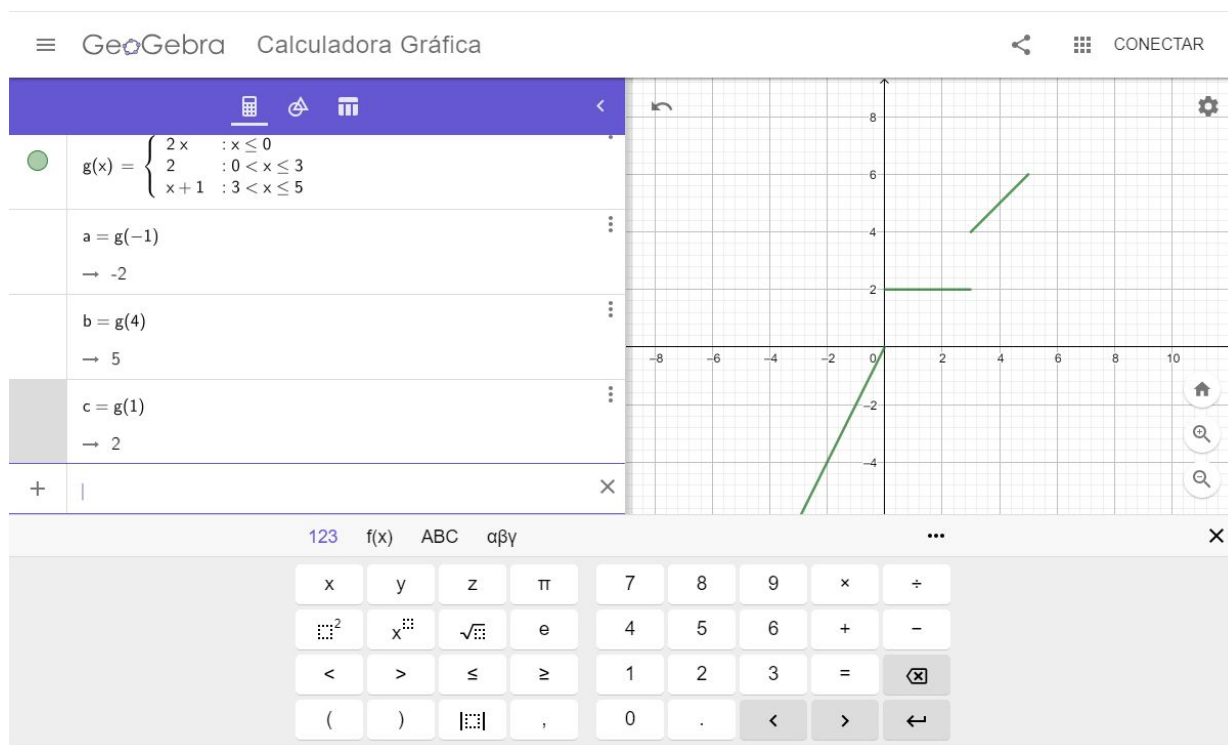
$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x+1 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Debemos escribir:

$g(x) = \text{si}(\text{primer intervalo, valor de la función, si}(\text{Segundo intervalo, valor de la función, si}(\text{tercer intervalo, valor de la función})))$



Una vez que terminamos de escribir la función se mostrará de la siguiente forma:



Límite y continuidad

1. Calcular los siguientes límites

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \end{array}$$

2. Graficar la siguiente función y verificar si el existe el límite cuando $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Dada la siguiente función:

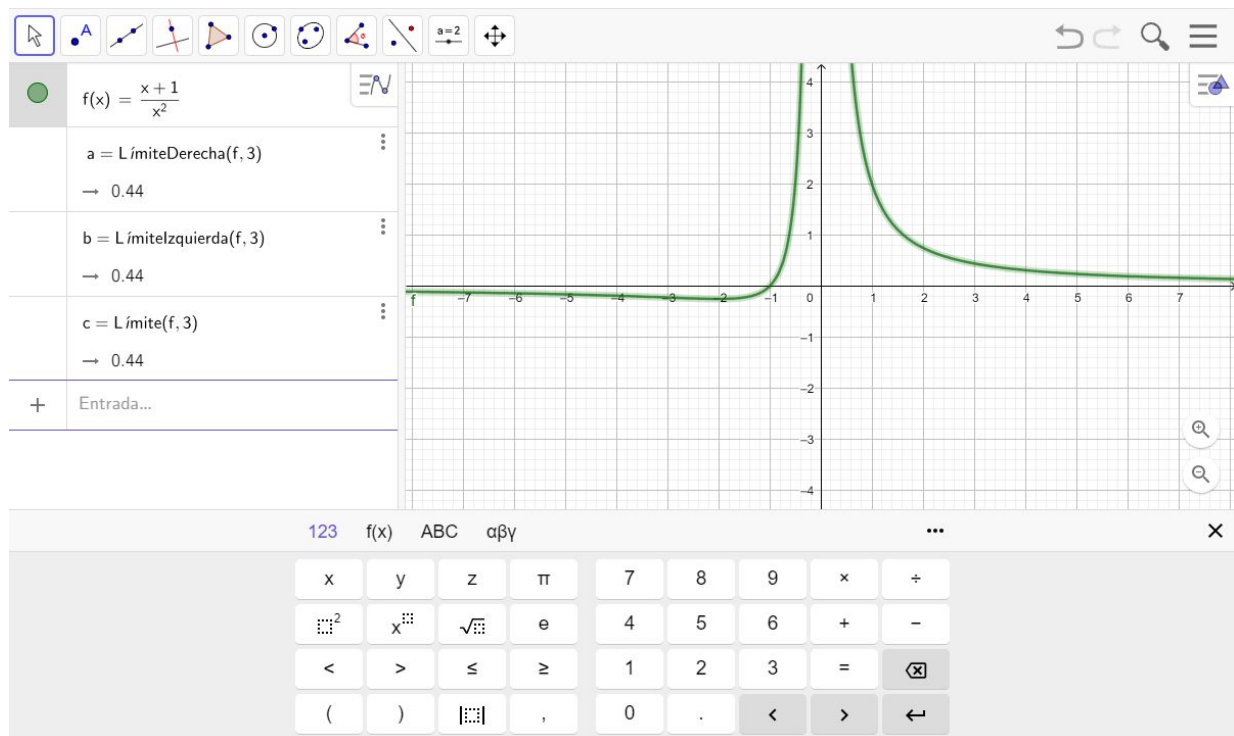
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -5 \\ x^2 & \text{si } -5 < x \leq 0 \\ x^3 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular los límites cuando $x=0$, $x=-4$, $x=1$, $x=10$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

En esta unidad buscamos que se comprendan los conceptos de límites gráficamente. Para la resolución de los ejercicios debemos realizar los siguientes pasos:

1. Graficar la función para cual debemos calcular el límite.
2. Visualizaremos la función gráficamente y analizaremos los límites por derecha y por izquierda para el punto dado. Si existen los límites laterales debemos analizar si valen lo mismo.
3. Una vez que finalizamos comprobaremos si lo analizado es correcto con el comando
 - a) LímiteDerecha(<Función>, <Valor>): para verificar el límite lateral derecho.
 - b) LímiteIzquierda(<Función>, <Valor>): para verificar el límite lateral izquierdo.
 - c) Límite(<Función>, <Valor numérico>): para verificar si el límite existe.



En las funciones por parte debemos seguir el mismo procedimiento pero debemos tener en cuenta que al verificar con los comandos debemos ingresar la parte de la función correspondiente según lo que estemos analizando.

- Si analizamos el límite por derecha, debemos ingresar la parte de la función que se acerca al punto que estamos calculando el límite por derecha.
- Si analizamos el límite por izquierda, debemos ingresar la parte de la función que se acerca al punto que estamos calculando el límite por izquierda.
- Cuando verifiquemos si el límite existe debemos ingresar la parte de la función donde está definido el punto para el cual estamos analizando el límite.

Derivadas

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones y analizar las gráficas de ambas funciones. ¿Qué relación encuentra?

a) $f(x) = x^6$

b) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = (x^2 + x)^4$

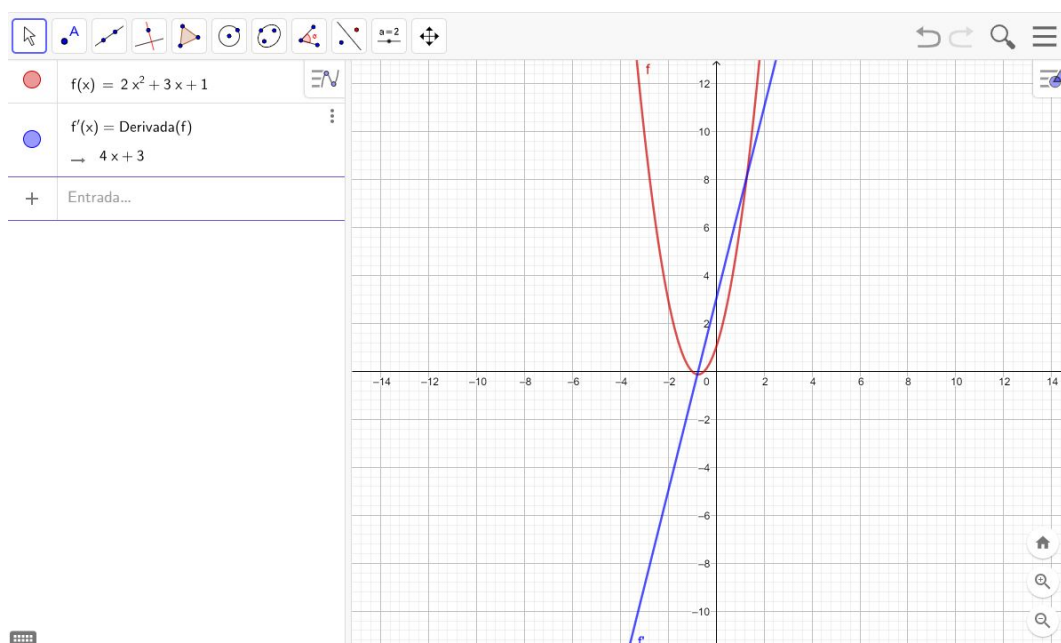
e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x^2 + 1}$ $f(x) = \frac{1}{x^5 - x^2 + 3}$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Sabemos por la teoría que en los intervalos donde la derivada de una función es mayor que cero, la función es creciente; y en los intervalos en los que la derivada de la función es menor que cero, la función es decreciente.

En esta unidad analizaremos el concepto de derivada gráficamente. Para ello:

1. Graficaremos la función
2. Graficaremos la derivada de la función con el comando:
Derivada(<Función>)
3. Analizaremos la relación explicada anteriormente.



Integrales

1. Graficar las siguientes funciones y hallar su integral

a) $\int x^5 dx$

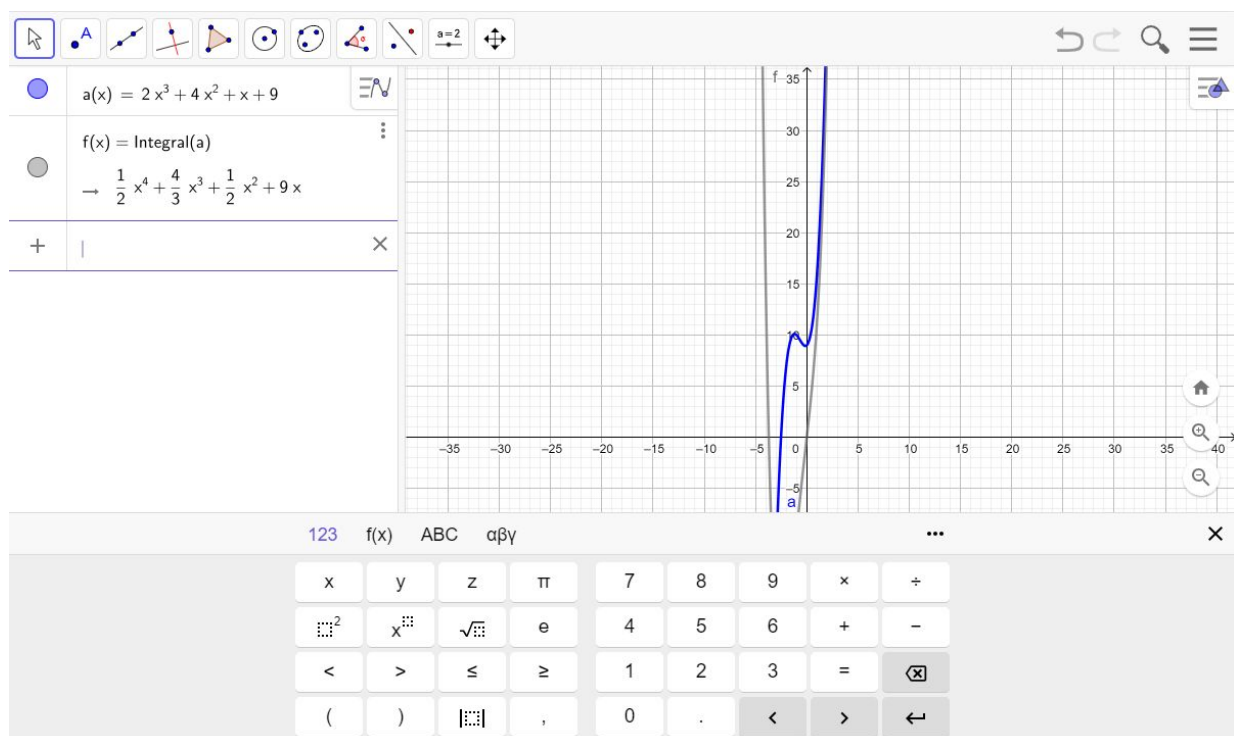
b) $\int e^x dx$

c) $\int (3x^4 + x^2 + 2) dx$

d) $\int (x + \sqrt{x}) dx$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

1. Graficar la función dada en el ejercicio.
2. Calcular la integral de la misma con el comando: Integral(<Función>).
3. Verificar si lo realizado analíticamente es correcto.

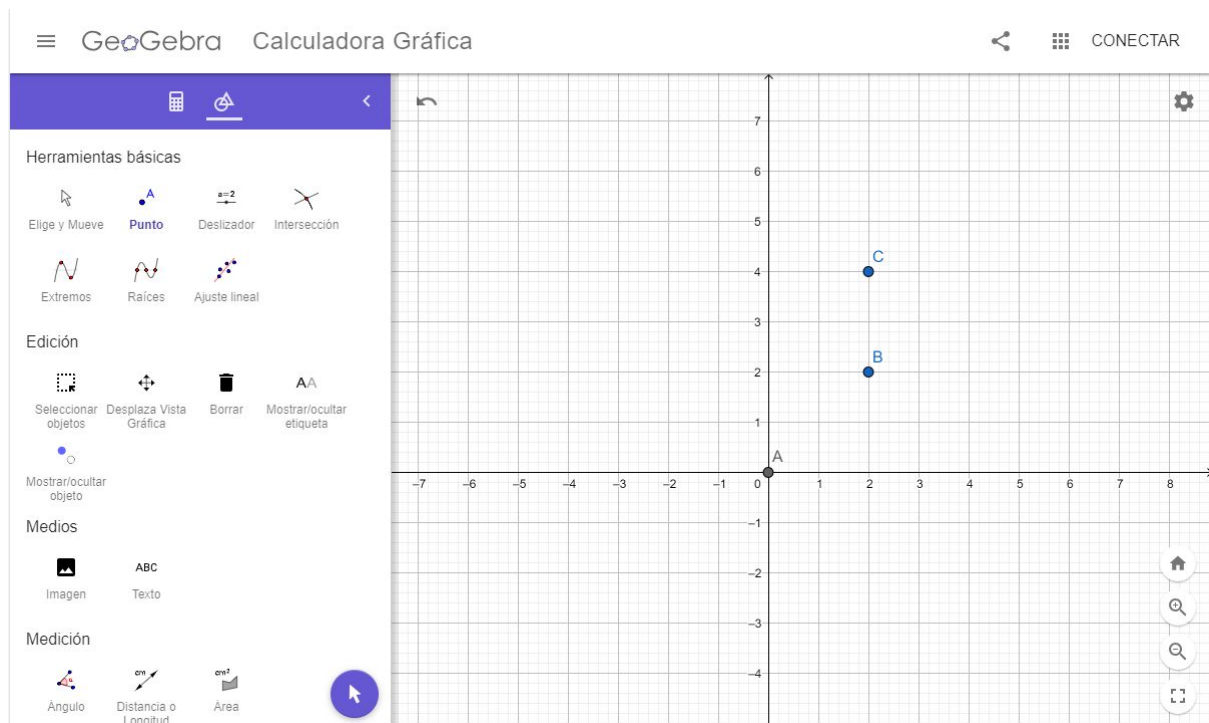


Sistemas de Coordenadas

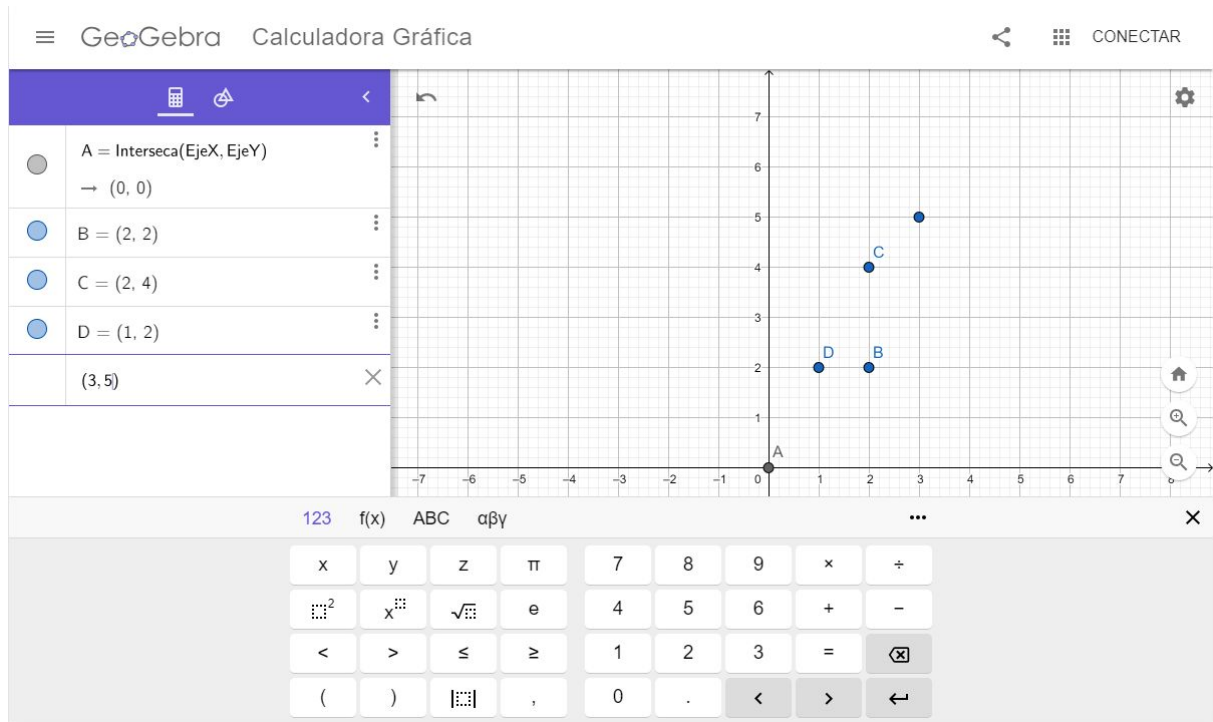
1. Hallar el punto medio del segmento determinado por los puntos $x=-4$ y $x=13$.
2. Demostrar que los puntos $A(4,1)$, $B(4;-1)$, $C(0;5)$ son los vértices de un triángulo isósceles.
3. Demostrar que el punto $(1,-2)$ está situada sobre el segmento que une los puntos $A(-5,1)$; $B(7,-5)$ y que equidista de ellos

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

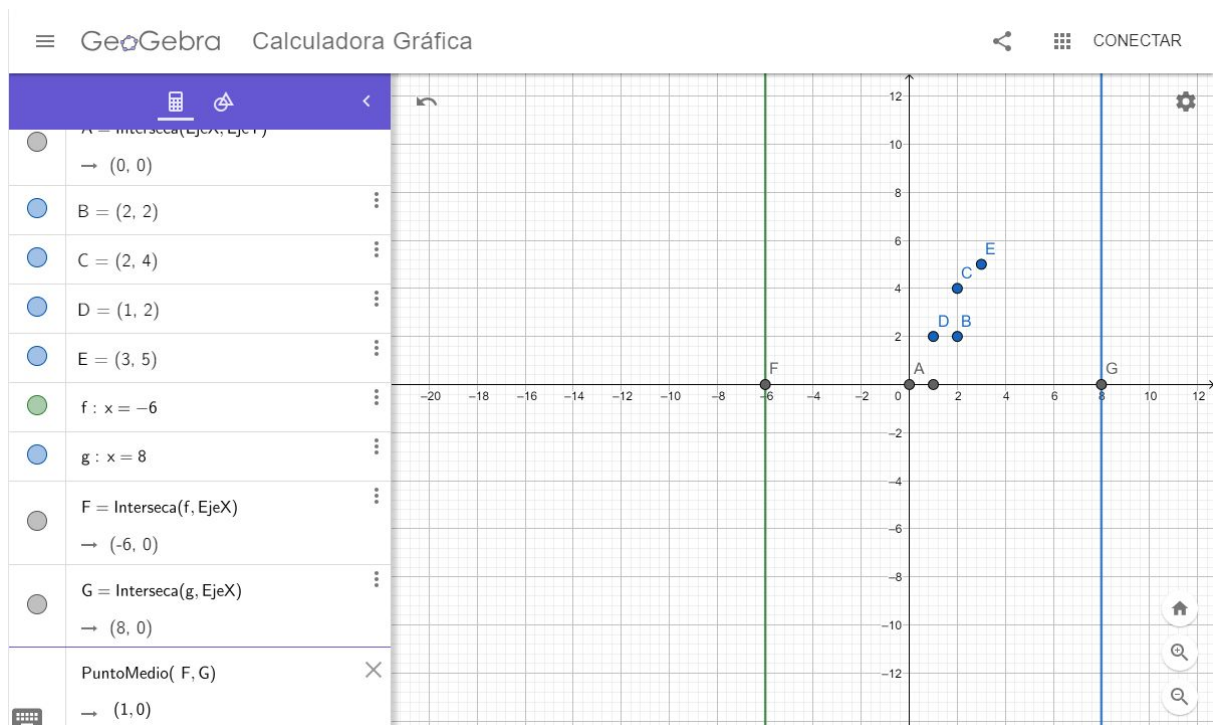
Para graficar un punto podés realizarlo mediante las herramientas:



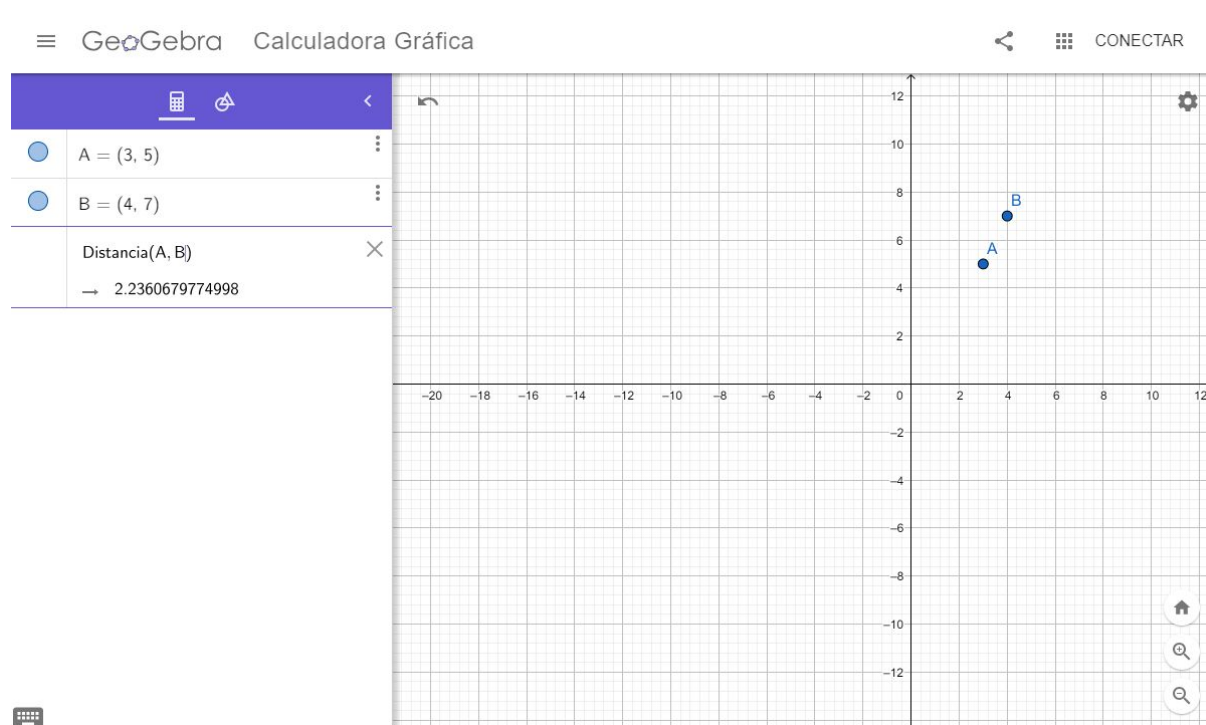
O mediante la utilización de comandos:



El punto medio entre dos puntos se puede obtener a partir del comando “PuntoMedio(<Punto>,<Punto>)”



Otro comando útil en esta unidad es: “Distancia(<Punto>,<Punto>)”



Números Complejos

1. Dado el Z , hallar Z conjugado y $-Z$. Representar gráficamente

a) $z = 5 + 9i$

b) $z = 8i$

c) $z = 10$

2. Resolver las siguientes operaciones:

a) $(8 - 7i) + (10 - i) - (-15 + 7i) =$

b) $(3 - 3i) - (5 + 16i) \cdot (6 - 16i) =$

c) $(9 + 2i) \cdot (7 - 5i) + 25i =$

d) $(1 - 4i) / (3 + i) =$

e) $(-5i + 1) \cdot (3 - i) \cdot (10 + 3i) =$

f) $(2 + 4i) / (4 - 2i) =$

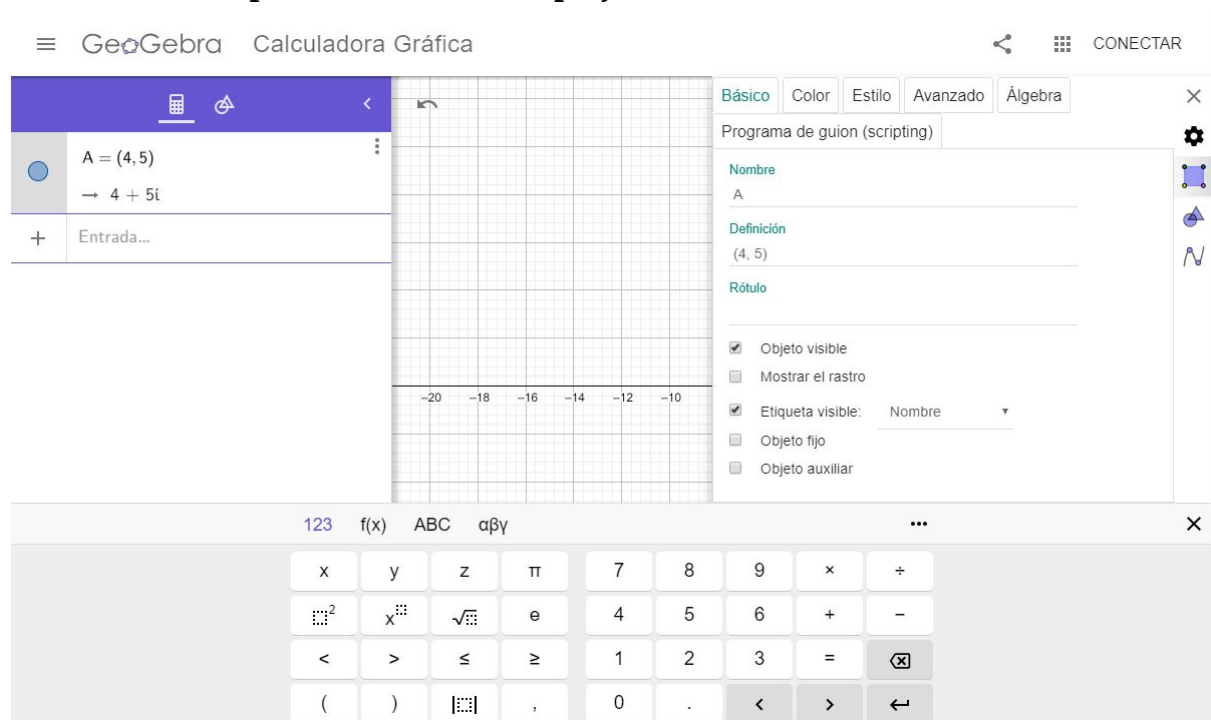
3. Dados los siguientes números complejos: $z_1 = 8 + 5i$, $z_2 = 7 - 5i$, $z_3 = -10 + 5i$ y $z_4 = 7i$. Calcular:

a) $z_2 - z_1 + z_2$

b) $z_4 + (z_1 + z_2)^2$

Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

Para esta unidad debemos saber cómo escribir un número complejo. Debemos escribir el punto, acceder a la configuración y en la pestaña Álgebra seleccionar la opción Número Complejo.



Luego de escribir más de un número complejo se podrán realizar las operaciones con la calculadora que se encuentra debajo o con el teclado.



Recta

1. Hallar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:
 - a) Paralela al vector $v=(2,1)$ y pasa por el punto $P(1,3)$.
 - b) Paralela al vector $v=(2,-2)$ y pasa por el punto $P(3,3)$.
 - c) Que pasa por los puntos $P(5,1)$ y $P_1(8,2)$.
 - d) Que pasa por los puntos $P(0,6)$ y $P_1(2,12)$.

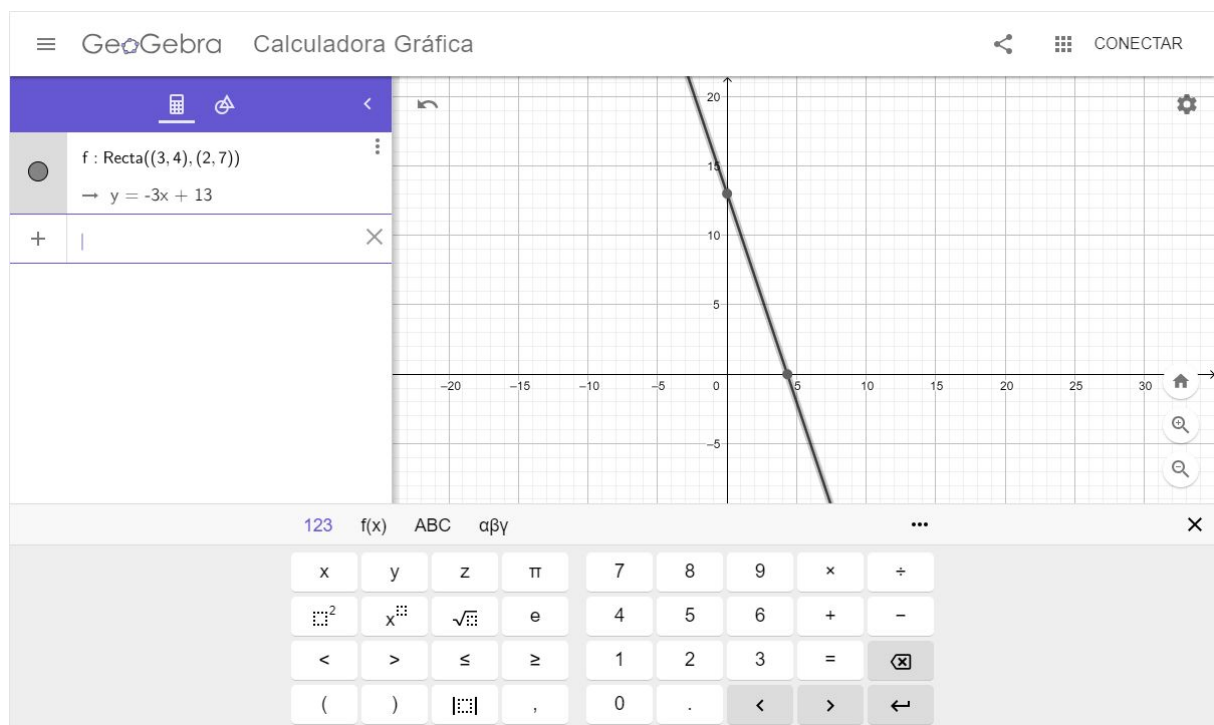
Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

En esta unidad trabajaremos con Recta y Plano en R^2 y R^3 . Por eso es necesario saber cuales son las diferentes formas de graficar una recta y un plano.

→ Comandos para hallar la ecuación de una Recta

- Si tengo dos puntos: Recta(<Punto>, <Punto>)
- Si tengo un punto y una recta paralela: Recta(<Punto>, <Recta (paralela)>)

Recta graficada a partir de dos puntos:



Las Cónicas

Circunferencia

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-5,1)$ y radio $r=5$.
2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-3,5)$ y pasa por el punto $P(3,3)$.
3. Hallar las intersecciones de la circunferencia $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ con los ejes coordenados.

Elipse

1. Representar gráficamente las siguientes elipses:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

b) $x^2 + 4y^2 = 16$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

d) $3x^2 + 2y^2 = 6$

2. Hallar la ecuación de la elipse de focos $F_1(2,2)$ y $F_2(6,2)$ que pasa por el origen de coordenadas.

Parábola

1. Representar gráficamente las siguientes parábolas

a. $y^2 = 8x$

b. $y^2 = -2x$

c. $x^2 = -4y$

d. $x^2 = 2(y-2)$

e. $y = 2x^2 - 4x - 3$

f. $x = \frac{1}{2}y^2 - 2$

2. Hallar la ecuación de las siguientes parábolas:

a) Foco $(2,-1)$ y directriz $x=8$

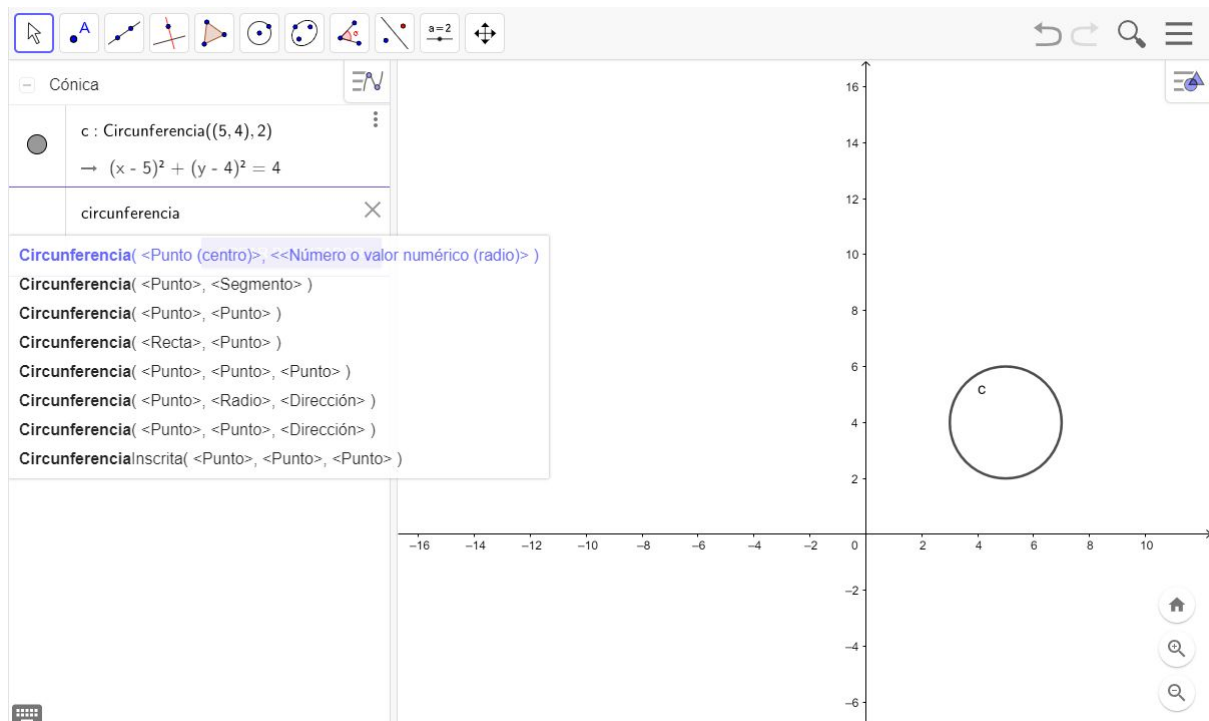
b) Foco $(0,5)$ y directriz $y+5=0$

c) Foco $(-3,4)$ y directriz $y=6$

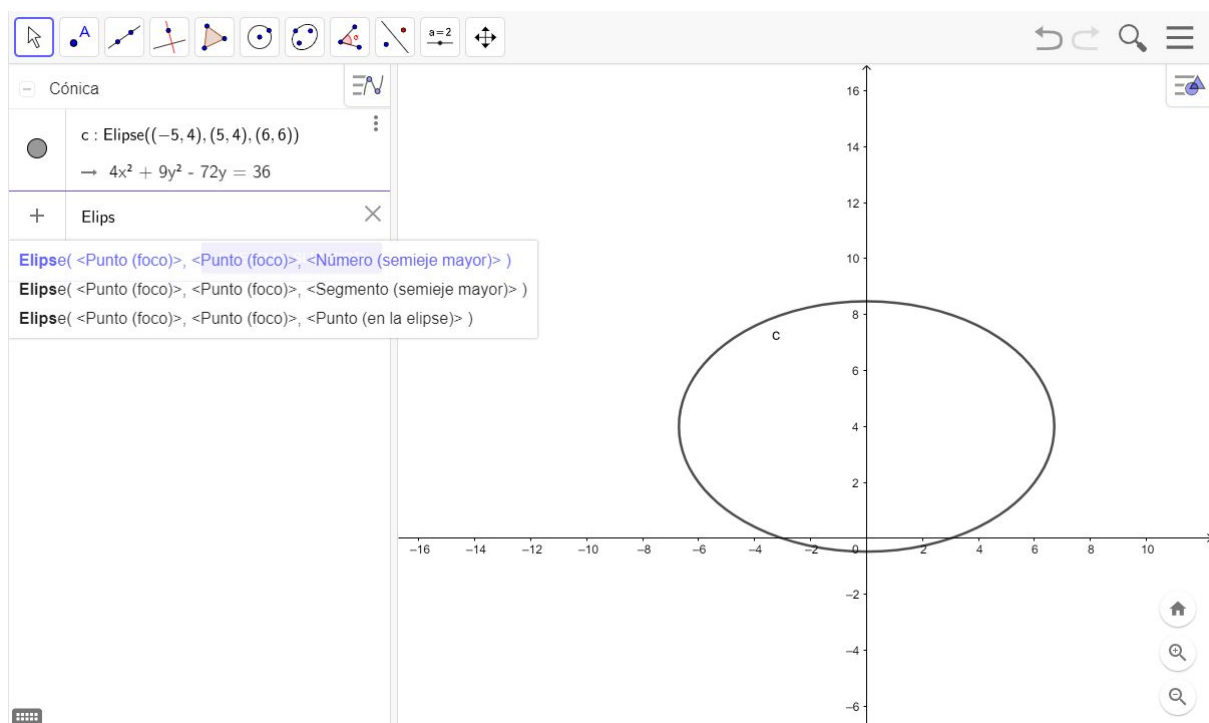
Comandos y datos necesarios para utilizar Geogebra

En esta unidad graficaremos cónicas por lo que escribiremos la ecuación o utilizaremos los comandos correspondientes a cada una.

Comandos para Circunferencia:



Comandos para Elipse:



Comandos para Parábola:

