Integral Indefinida

Estamos acostumbrados a decir que el producto y el cociente son operaciones inversas. Lo mismo sucede con la potenciación y la radicación. Vamos a estudiar ahora la operación inversa de la diferenciación.

Dada la función f (x), llamaremos función primitiva de ésta y la designamos con F (x) a toda función tal que

$$F'(x) = f(x)$$

$$dF(x) = f(x).dx$$

Por ejemplo si $f(x) = x^3$, entonces una función primitiva de f (x) es:

$$F(x) = \frac{x^4}{4}$$

ya que $F'(x) = \frac{4x^3}{4} = x^3 = f(x)$

o bien $dF(x) = F'(x).dx = x^3dx = f(x).dx$

Otras funciones primitivas distintas de f(x) son, por ejemplo:

$$y = \frac{x^4}{4} + 5 \;;\; y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \;;$$

esto ocurre porque la derivada de una constante es igual a cero.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

"TODAS las funciones que tienen igual derivada difieren entre sí en una constante "

Luego, hallada una primitiva de f (x), todas las primitivas de f (x) difieren de la calculada en una constante.

La operación de encontrar todas las primitivas de f(x) es la antidiferenciación, que simbolizamos:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

en la cual ***C*** es una constante arbitraria, debiendo leerse el miembro de la izquierda ***"integral de f de x, diferencial de x "***.

Tabla de Integrales.

A partir de las tablas de derivación podemos obtener reglas para la integración:

$$\int dx = x + C$$

$$\int k\,dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \cos x\,dx = senx + C$$

$$\int - sen\ x\,dx = \cos x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Ejemplos: Hallar:

1- $\int \left(8x^3 + \sqrt{x} - 2\right)dx = 8\int x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 2\,dx = \frac{8x^4}{4} + \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2x + C = 2x^4 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2x + C$

2- $\int \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)dx = \int \frac{1}{2} - 3\,x^{-2} + 4\,x^{-4}\,dx = \frac{1}{2}\,x - 3\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4\,\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C =$

$\frac{1}{2}x - 3\,\frac{x^{-1}}{-1} + 4\,\frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{x} - \frac{4}{3x^2} + C$

Actividad.

Hallar las siguientes integrales.

a) $\int \left(1 - \frac{x^3}{2} + x^5\right)\ dx$

b) $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)\ dx$

c) $\int \left(x^2 + 2\right)^2 dx$

d) $\int 3x^2\left(x^2 - 2\right)\ dx$

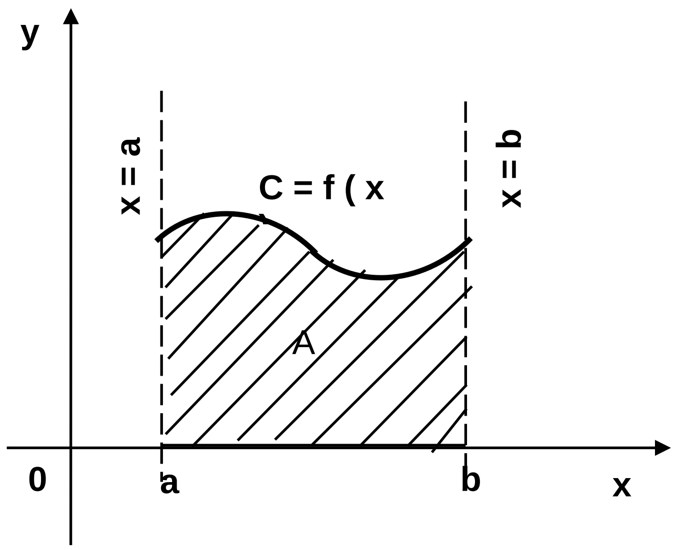
e) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\ dx$

Integral Definida

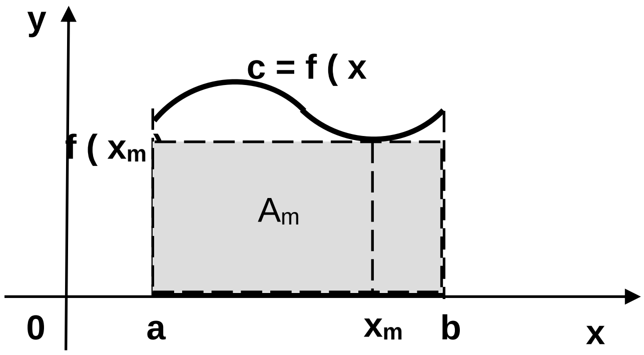
Aplicación de la Integral Definida al Cálculo de Áreas Planas.

La integral definida, surgió como una necesidad de calcular el área de recintos planos encerrados por curvas. Por tal motivo generalmente se presenta a la integral definida a través del concepto de cálculo de un área. Este camino es bastante lógico y, especialmente muy intuitivo

Supongamos que queremos calcular el área encerrada por la curva C de la figura, representativa de la función f(x), el eje **x** y las rectas de ecuación **x = a** y **x = b**.



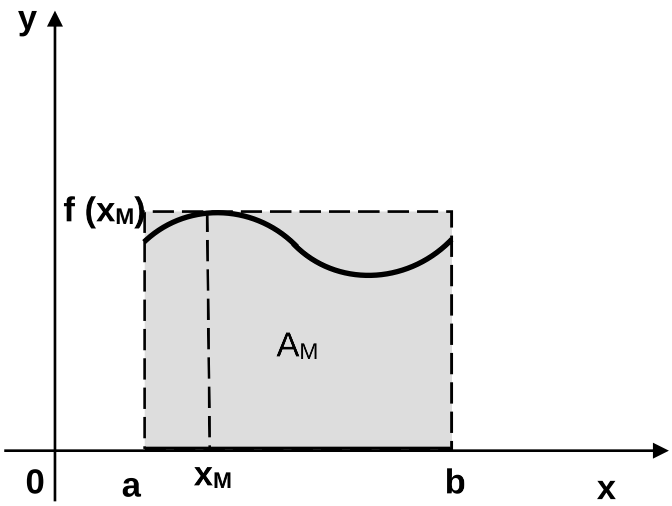
Una grosera aproximación de dicha área consistirá en tomar el área del rectángulo de lados **ab** y **f(x_m)** siendo **x_m** la abscisa para la cual la función **f(x)** asume su valor mínimo en el intervalo considerado; evidentemente tal área será menor que el área que pretendemos medir.



Llamemos al área A_m. Ésta será el producto de f (x_m) por (b – a).

Es decir: $Am = f(x_m) \bullet (b-a)$

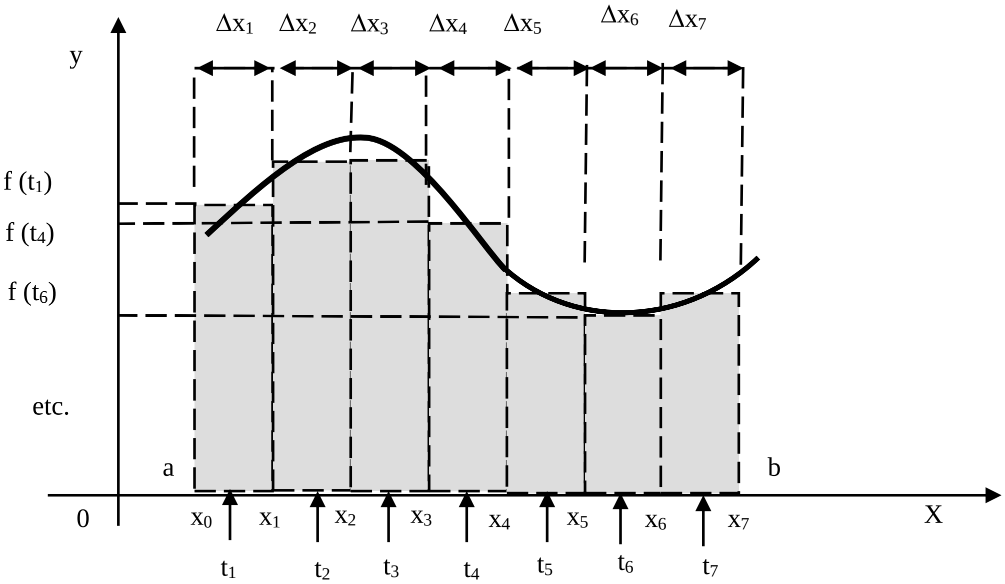
Algo similar ha de ocurrir si tomamos el rectángulo de lados **ab** y **f(x_M)** siendo **x_M** la abscisa donde la función asume su valor máximo; en tal caso el área calculada supera el valor del área bajo la curva.



Es decir: $A_M = f(x_M) \bullet (b-a)$

Resulta evidente que una aproximación mejor se obtiene haciendo una partición P_n del a,b , y tomando como área la suma de las áreas de los rectángulos elementales.

$$A_i = f(t_i)\Delta x_i$$



Como se ve en la figura el área aproximada está dada por la suma

$$A' = \sum_{i=1}^{7} A_i \qquad \text{pero} \qquad A_i = f(t_i)\Delta x_i$$

entonces $$A' = \sum_{i=1}^{7} f(t_i)\Delta x_i$$

Intuitivamente nos damos cuenta que el área aproximada A' se ajustará cada vez más al área A bajo la curva a medida que mayor sea el número de intervalos de la partición. También es intuitivo que en el límite, cuando el número de los rectángulos elementales tiende a ∞ , la suma dará exactamente el área A.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i = \int_a^b f(x)\ dx$$

Para calcular la Integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se aplica la Regla de Barrow

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Recordemos que F(x) es una primitiva de f (x).

Esta expresión liga el concepto de integral definida y el de antiderivada, que como sabemos, se calcula mediante integración indefinida. El uso de esta regla simplifica notablemente el cálculo de las integrales definidas.

Resulta cómodo usar la notación:

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\Big]_a^b$$

con ello la regla de Barrow puede escribirse:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big]_a^b$$

Ejemplo :

Hallar $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$$

Actividad. Calcular las siguientes integrales definidas.

1) $\int_0^8 x^3\,dx =$

2) $\int_0^1 (1-\sqrt{x})\,dx =$

3) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2} =$

Cálculo de Áreas por Integración Definida.

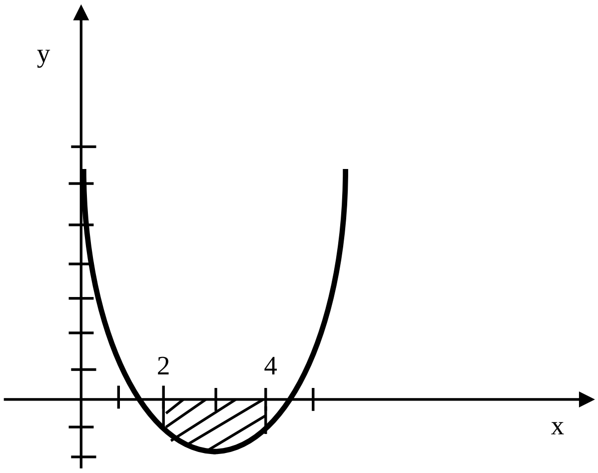
Las áreas, siendo números que representan la medida de una superficie (es decir el número de veces que cabe la unidad de superficie en un determinado recinto), no pueden ser negativas.

Las integrales definidas en cambio, sí pueden dar como resultado un número negativo. Esto ocurre precisamente toda vez que la función asume valores negativos en la totalidad del intervalo de integración.

Ejemplo:

Hagamos la integral de la función

$f(x)=(x-3)^2-2$ entre los valores 2 y 4.



Dentro de ese intervalo la función toma exclusivamente valores negativos y el valor resultante de la integración es un número negativo; sin embargo el área entre la curva y el eje no puede ser negativa; en consecuencia debe tomarse el valor absoluto del resultado de la integral cuando lo que se está calculando es un área.

El valor negativo de la integral en estos casos lo único que indica es que la curva está por debajo del eje x.

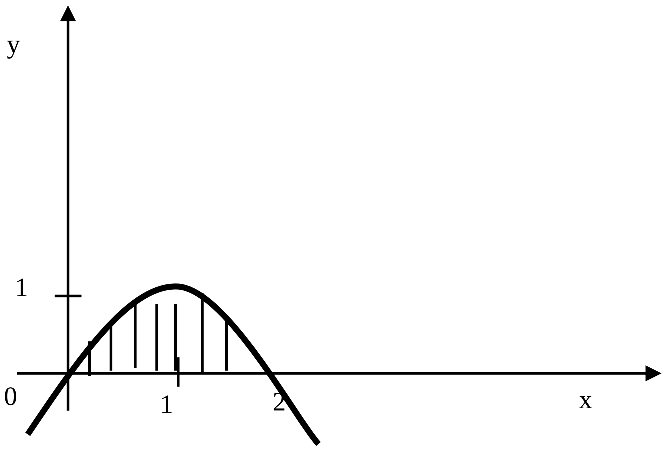
La verdadera dificultad se presenta cuando a lo largo del intervalo de integración la función cambia de signo de modo que parte de la curva queda debajo del eje **x** y parte encima de él. Si no se tiene la precaución de graficar la curva y con ello evidenciar este hecho, se cometerá el error de suponer que la integral está dando el área entre la curva y el eje **x**, cuando en realidad el resultado de la integral estará dando la diferencia entre las áreas que están por encima del eje **x** y las que están debajo.

En el ejemplo, ocurriría esto si integramos entre 0 y 6. Para evitar este inconveniente debemos dividir el intervalo de integración en tantos subintervalos como sea necesario a fin de tener subintervalos dentro de los cuales la función tenga un mismo signo; (es decir entre “ceros” o raíces de la función) integrar entonces separadamente sobre cada intervalo y sumar luego los valores absolutos de cada resultado.

Actividad: Calcular $\int_0^6 \left[(x-3)^2 - 2\right] dx$

Ejemplo 1:

Hallar el área limitada por $y = 2x - x^2$ y el eje x.



Hallamos las intersecciones de la curva con el eje x.

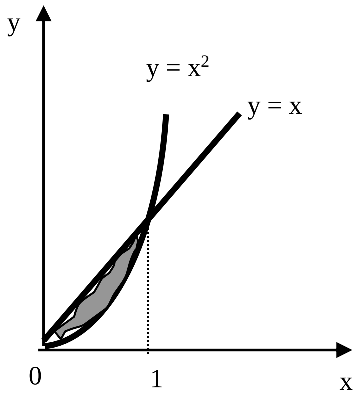
$$2x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2-x) = 0$$

resulta $\quad x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = 2$

Calculamos la integral definida en 0,2

$$A = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\, dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2: Calcular el área encerrada entre la recta **y = x** y la parábola **y = x²**



El área deberá obtenerse como diferencia entre el área bajo la recta y el área bajo la parábola, entre los límites que marcan las intersecciones de ambas gráficas, es decir:

$$\mathbf{x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0}$$

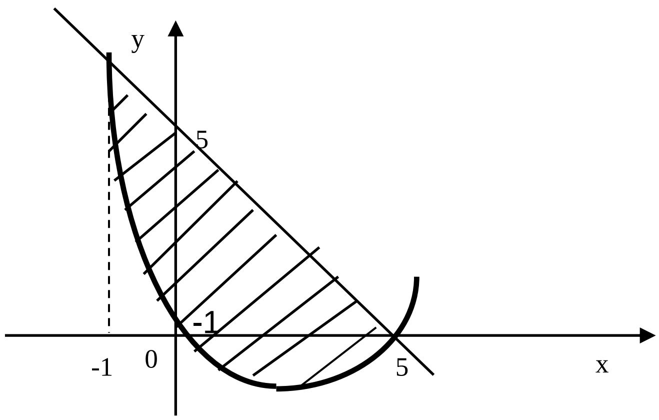
que tiene como raíces **0** y **1**

$$\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

<u>Ejemplo 3:</u>

Hallar el área encerrada por la recta $y = -x + 5$ y la parábola de ecuación $y = x^2 - 5x$

Hallamos por igualación las intersecciones entre ambas gráficas



$$x^2 - 5x = -x + 5$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos $x_1 = -1$ y $x_2 = 5$ que determinan los extremos de la integración.

Para hallar el área encerrada, calculamos la integral definida de la diferencia de las ordenadas de las dos curvas.

$$A = \int_{-1}^{5} \left[(-x+5) - (x^2 - 5x)\right] dx = \int_{-1}^{5} \left(-x^2 + 4x + 5\right) dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \Bigg]_{-1}^{5} = 36$$

De la gráfica conjunta de las dos ecuaciones puede visualizarse que el área *bajo* la curva **$y = x^2 - 5x$** entre los puntos de abscisas **0** y **5** está ubicada debajo del eje de las **x,** debiendo en consecuencia resultar negativa la integral entre esos límites. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que al efectuar la diferencia entre las áreas de la recta y la parábola, la correspondiente a la parábola ingresó en el cálculo de la integral con signo negativo, es decir restando, lo que significa que la parte positiva del área correspondiente se restará, en tanto que la parte negativa se sumará al efectuar el cómputo total.

Resulta entonces que el cálculo que hemos realizado es equivalente a:

a) Computar la $\int_{-1}^{5}(-x+5)\,dx$

b) Restar la $\int_{-1}^{0}(x^2-5x)\,dx$

c) Sumar el valor absoluto de la $\int_{0}^{5}(x^2-5x)\,dx$
(parte de la parábola debajo del eje x)

Actividad.

Ejercicio 1: Hallar el área limitada por:

a) $y = x^2 - 3x$ y el eje x.

b) $y = \frac{x^2}{4} - 1$ y el eje x.

c) $y = x^2 + x - 2$ y = 0 ; x = 0 ; x = 2

d) $y = x^2 - 9$ el eje x ; x = 1 y x = 4

Ejercicio 2: Calcular el área comprendida entre las curvas.

a) $y = x - x^2$ e $y = -x$

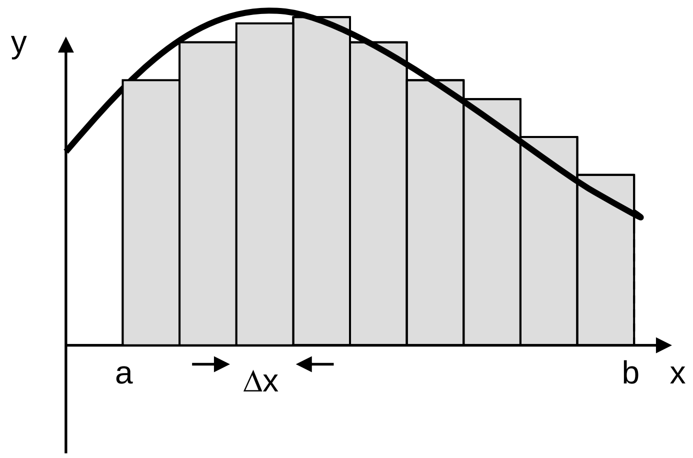
b) $y = x^2 - 2$ e $y = 6 - x^2$

c) $y = 9 - x^2$ e $y = x + 7$

Integración Numérica:

En las aplicaciones prácticas, como hemos dicho al comenzar el desarrollo de este capítulo, son pocas las veces en que se necesita conocer el resultado exacto de una integral. Como la integral de una función puede obtenerse exactamente hallando el límite de una sucesión, un procedimiento aproximado consiste en emplear el mismo procedimiento tomando un término de la sucesión suficientemente avanzado.

Partiendo el intervalo [*a,b*] en **n** subintervalos iguales de longitud **Δx** y tomando el valor de la función en el extremo izquierdo de cada intervalo, la integral tiene como valor aproximado:



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Delta x\,[\,f(a) + f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \cdots + f(a+(n-1)\Delta x]$$

Ejemplo:

Calcular la integral: $\int_0^1 x\,dx$

a)método exacto: $\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 0{,}5$

b)método aproximado: hacemos n = 100 para lo cual resulta $\Delta x = \frac{1-0}{100} = 0{,}01$

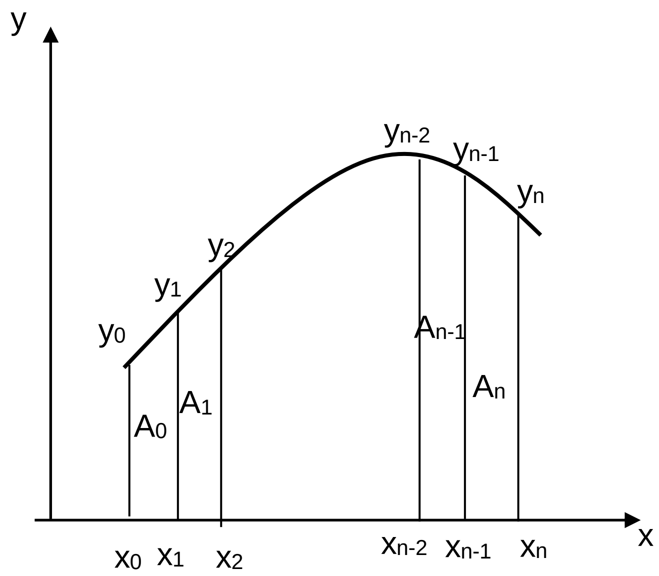
$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{100}\left[0 + \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \cdots + \frac{98}{100} + \frac{99}{100}\right] = 0{,}495 \text{ (el valor exacto es 0,5)}$$

Como hemos dicho, si no se puede calcular en forma exacta la función F(x) **(**función primitiva de f(x)**,** lo que sucede con suma frecuencia, será necesario apelar a métodos de cálculo aproximado.

Un método de cálculo aproximado que mejora el descripto de tomar rectángulos de igual base y alturas correspondientes al valor de la función en el extremo izquierdo de los subintervalos es el llamado:

Método de los Trapecios:

Este método reemplaza cada uno de los rectángulos elementales por un trapecio de altura igual a la longitud **Δx** común de los subintervalos y bases respectivamente iguales a los valores de la función en los extremos de cada uno de los subintervalos, consiguiéndose, de este modo una mejor aproximación al valor exacto de la integral.



Suponemos entonces conocidos los valores que toma la función en los puntos situados a igual distancia x_0, x_1, ..., x_n siendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Un primer valor aproximado del área puede obtenerse sumando las áreas de los trapecios inscriptos en cada una de las superficies parciales.
Por ejemplo:

Área (A_0) = ½ $\Delta x * (y_0 + y_1)$; por lo que la suma resulta:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{\Delta x}{2} * \left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right) = \Delta x\left(\frac{E}{2} + P + I\right)$$

siendo **E** = suma de las ordenadas extremas; **P** = suma de las ordenadas de subíndices pares; **I** = suma de las ordenadas de índices impares.

Ejemplo:

Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$ (esta integral no puede calcularse fácilmente con la Regla de Barrow)

siendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$; tomando Δx = 0,1 puede construirse la siguiente tabla:

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	0,707	0,706	0,705	0,702	0,696	0,686	0,672	0,653	0,631	0,605	0,577

Resultando $\frac{E}{2} = \frac{0{,}707 + 0{,}577}{2} = 0{,}642$

$$P + I = 6{,}056$$
$$y$$
$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong 0{,}1 * 6{,}698 \cong 0{,}670$$

Actividad:

a) Hallar el valor aproximado de $\int_2^6 \frac{1}{x}\,dx$ aplicando la fórmula de los trapecios con n=4

b) Calcular el valor aproximado como en el problema anterior para $\int_1^5 \sqrt{x+35}\,dx$

c) Si una curva viene dada por la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5
y	1,8	4,2	7,8	9,2	12,3

Hallar el área bajo la misma por aplicación de las fórmulas de los trapecios.