LAS CÓNICAS.

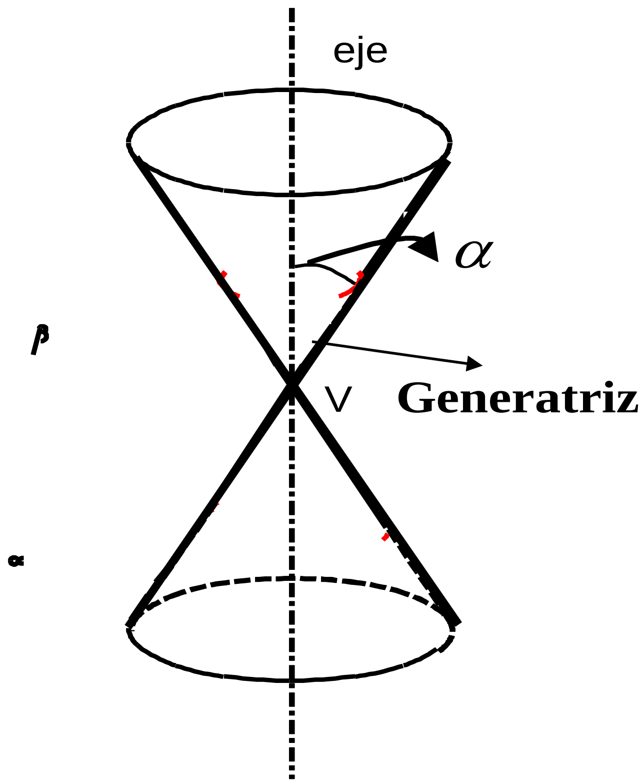
SUPERFICIE CÓNICA: SU GENERACIÓN.

Se denominan cónicas a las líneas planas que se obtienen intersectando bajo distintos ángulos, una superficie cónica con un plano.

La superficie cónica se obtiene haciendo rotar una recta denominada generatriz alrededor de un punto fijo llamado vértice manteniendo otro punto constantemente sobre una circunferencia llamada directriz situada en un plano perpendicular al eje y condicionada a que su centro esté sobre el eje.

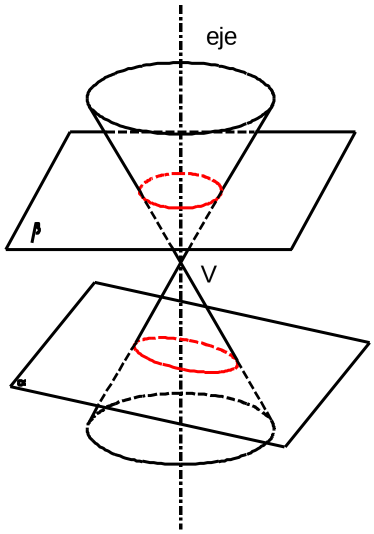
Los diferentes tipos de cónica se generan cortando la superficie cónica bajo distintos ángulos.

Se presentan tres casos según que el ángulo de corte sea menor, igual o mayor que el ángulo de abertura de la superficie cónica. Definimos como tal al ángulo (α) entre el eje de la superficie cónica y una cualquiera de sus generatrices.



Si se corta una superficie cónica con un plano bajo un ángulo mayor que el de abertura, el plano corta una sola de las ramas de la superficie cónica y se obtiene una curva cerrada denominada **elipse.** Se presentan dos casos particulares:

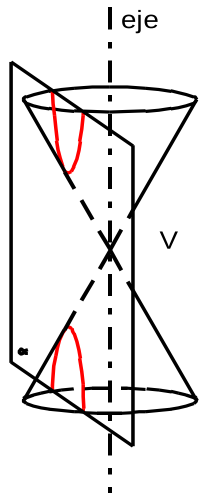
a) cuando el plano de corte es perpendicular al eje de la superficie cónica la intersección "degenera" en una **circunferencia ,**



Circunferencia - Elipse

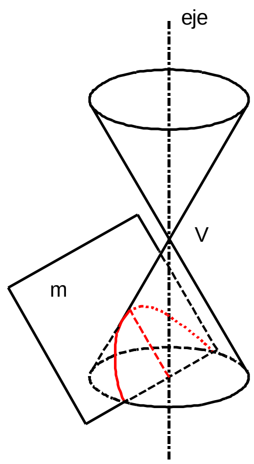
b) si se traslada el plano de corte paralelamente a sí mismo hasta que contenga el vértice, la elipse o la circunferencia, según sea el caso, "degenera" en un punto: el vértice de la superficie cónica.

Si el plano de corte tiene con respecto al eje un ángulo menor que el de abertura, cortará las dos ramas de la superficie cónica, obteniéndose una curva que recibe el nombre de hipérbola. Como caso particular, cuando el plano se mueve paralelamente a sí mismo hasta contener al vértice, la hipérbola "degenera" en un par de rectas ***(observar el corte de la superficie cónica con el plano del dibujo)***.



Hipérbola

Si por último, el plano de corte es paralelo a la generatriz, cortará una sola de las ramas de la superficie cónica y se obtendrá como curva interesección una **parábola**. En este caso, cuando el plano de corte se desplaza paralelamente a sí mismo hasta contener al vértice, la parábola "degenera" en una recta coincidente con una cualquiera de las generatrices de la superficie cónica.



Parábola

Los nombres **elipse**, **hipérbola** y **parábola** de deben al geómetra **Apolonio**, de la escuela de Alejandría, que hacia el año 225 AC., escribió un tratado sobre la secciones cónicas en ocho libros, siete de los cuales han llegado a nosotros.

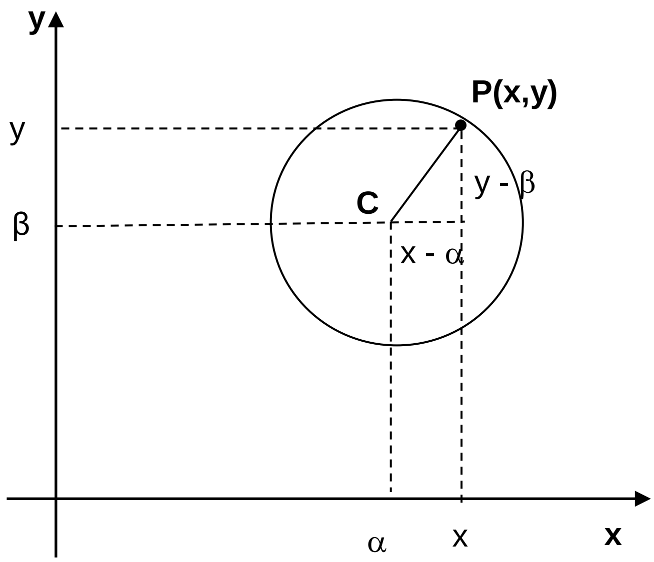
ESTUDIO DE LAS CÓNICAS A PARTIR DE SU DEFINICIÓN COMO LUGAR GEOMÉTRICO

CIRCUNFERENCIA.

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Dado un punto $C(\alpha;\beta)$ que llamamos **centro** y un valor $r>0$ que designamos con el nombre de radio podemos definir:

Ecuación:

$P(x,y)$ punto genérico
$C(\alpha;\beta)$ centro de la circunferencia



Considerando la fórmula de distancia entre dos puntos, calculamos el valor del radio:

$$CP = r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$

Ecuación canónica de la circunferencia de centro (α,β) y radio r.

Desarrollando los cuadrados y ordenando:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$ obtenemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

que es la ecuación General de la circunferencia

De la igualdades anteriores obtenemos:

Coordenadas del centro: $\alpha = -\frac{D}{2}$; $\beta = -\frac{E}{2}$

y radio: $r = \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 - F\right)}$

Analicemos el valor del radio:

Si:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - F > 0 \Rightarrow & \textit{Circunferencia de radio real} \\ \alpha^2 + \beta^2 - F = 0 \Rightarrow & \textit{La circunferencia se reduce a un punto} \\ \alpha^2 + \beta^2 - F < 0 \Rightarrow & \textit{Circunferencia de radio imaginario} \end{cases}$$

La ecuación general de la circunferencia es un caso particular de la ecuación general de segundo grado en dos variables, cuya forma es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Comparando esta ecuación con la ecuación general de la circunferencia, observamos que en ésta última los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y además falta el término en **xy**.

Resulta entonces que una ecuación tendrá como lugar geométrico una circunferencia si responde a la ecuación general de segundo grado en dos variables, con los coeficientes A y C iguales, con el término Bxy (llamado término rectangular) faltante y que verifique:

$$\alpha^2 + \beta^2 - F > 0$$

Ejemplos:

1.- Dada la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0 \quad ;$$

Determinar:

a) Las coordenadas del centro.
b) El valor del radio.
c) La ecuación cartesiana.
d) Efectuar la representación gráfica.

$$C(\alpha;\beta)=\begin{cases}\alpha=-\dfrac{D}{2}\Rightarrow\quad \alpha=-\left(-\dfrac{6}{2}\right)=3\\ \beta=-\dfrac{E}{2}\Rightarrow\quad \beta=-\left(-\dfrac{8}{2}\right)=4\end{cases}\Rightarrow C(3;4)$$

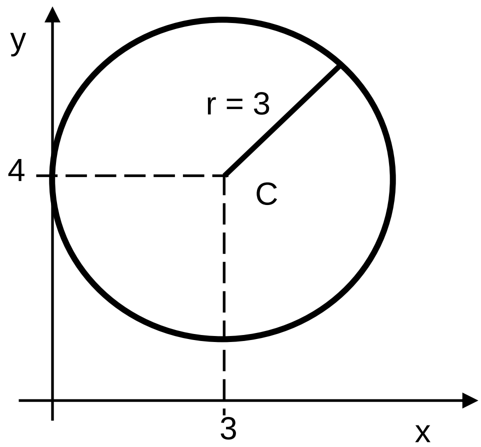
$$r=\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2-F\right)}\Rightarrow r=\sqrt{\left(3^2+4^2-16\right)}=3$$

$$r=3$$

Ecuación cartesiana:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=3^2$$

Representación:



2.- Sabiendo que el centro de una circunferencia es $C(-2;5)$ y su radio r = 3, escribir su ecuación general:

Ecuación canónica:

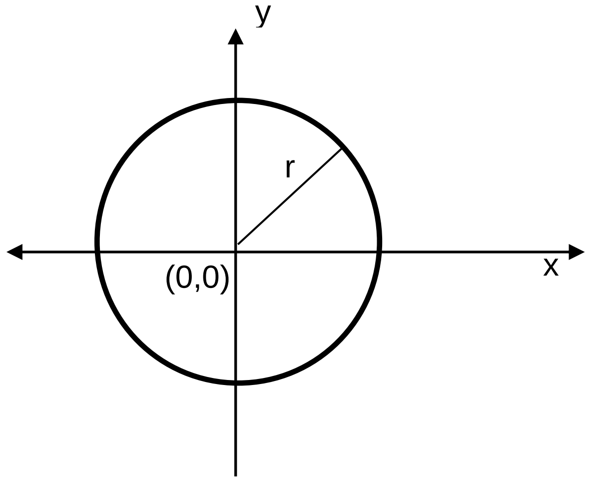
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\Rightarrow$$
$$(x+2)^2+(y-5)^2=3^2\Rightarrow$$
$$x^2+y^2+4x-10y+20=0\qquad \textit{Ecuación}\quad \textit{general}$$

Posiciones particulares.

La ecuación: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ de la circunferencia se simplifica para posiciones particulares.

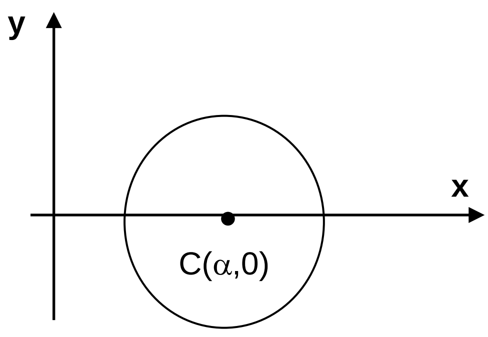
1.- Si el centro está en el origen de coordenadas:

$$C(0;0)\Rightarrow \boxed{x^2+y^2=r^2}$$



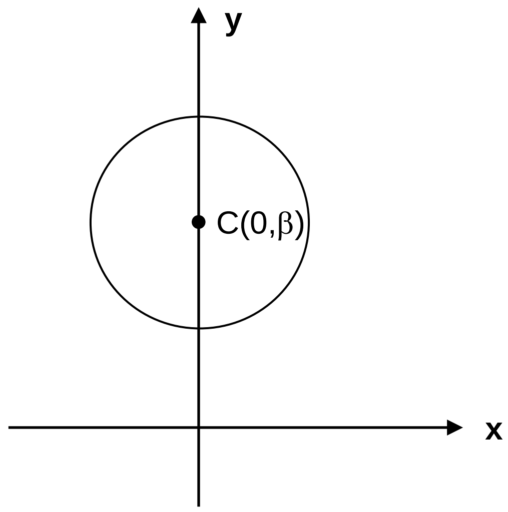
2.- Si el centro está sobre el eje de las abscisas, $\beta=0$:

$$C(\alpha;0)\Rightarrow (x^2-\alpha^2)+y^2=r^2$$



3.- Si el centro está sobre el eje de las ordenadas, $\alpha = 0$:

$$C(0;\beta) \Rightarrow x^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$



INTERSECCIONES.

Intersección de una circunferencia y una recta.

Si dos líneas coplanares tienen un punto en común, las coordenadas de este punto deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones de ambas líneas. En consecuencia el problema de hallar las coordenadas de los puntos de intersección de dos líneas se resuelve, encontrando la solución del sistema determinado por sus ecuaciones.

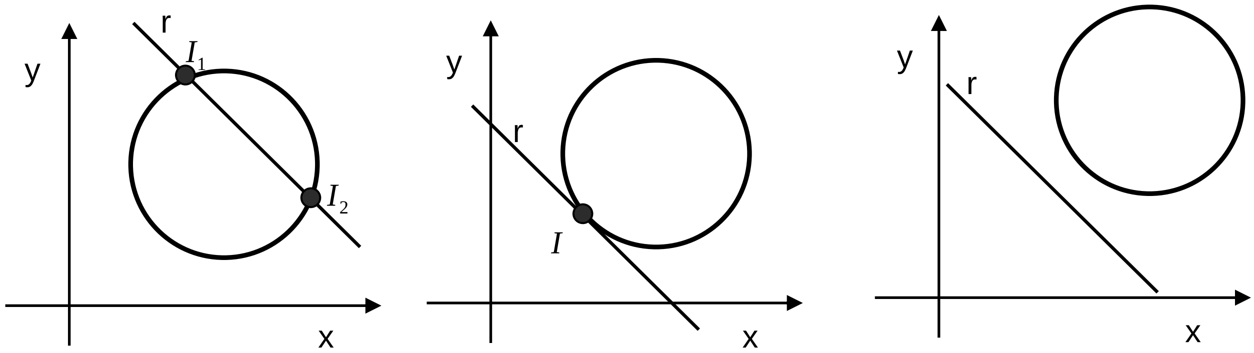
Escribimos el sistema formado por ambas ecuaciones, y luego sustituimos en la ecuación de la circunferencia el valor de una de las variables que despejamos en la ecuación de la recta, obteniendo una ecuación de 2º grado en una sola variable que resolvemos.

La solución de esta ecuación da dos valores x_1 y x_2. Pueden presentarse los siguientes casos:

a) $x_1 \neq x_2$: $x_1 \in R \wedge x_2 \in R \Rightarrow$ recta secante a la circunferencia; 2 puntos de intersección.

b) $x_1 = x_2$: $x_1 = x_2 \in R \Rightarrow$ recta tangente a la circunferencia; 1 punto de intersección.

c) $x_2 \in C \wedge x_1 \in C \Rightarrow$ recta exterior a la circunferencia; no hay puntos de intersección. *(C = conjunto de los números complejos)*



a) $I_1 \neq I_2$: recta secante

b) $I_1 = I_2$: recta tangente

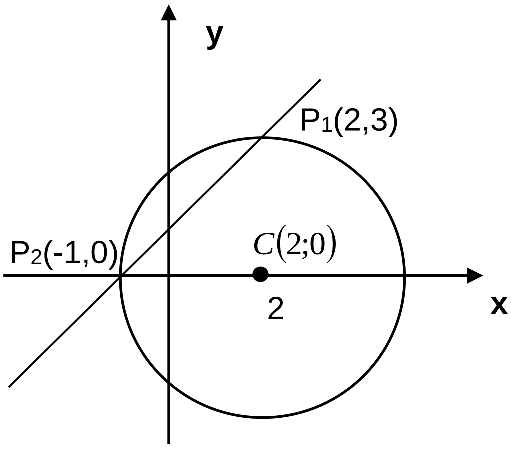
c) $\nexists I$: recta exterior

Ejemplo:

Determinar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ y la recta $x - y + 1 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

En la recta $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$ sustituimos en la ecuación de la circunferencia "y " por " x+1".



$$x^2 + (x+1)^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

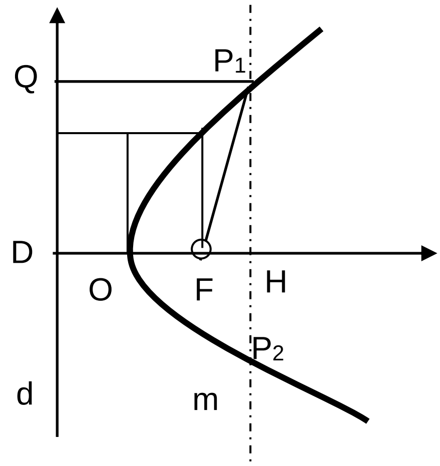
para: $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 3 \therefore P_1(2;3)$
$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 0 \therefore P_2(-1;0)$

Coordenadas del centro y radio de la circunferencia:

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{D}{2} \Rightarrow \alpha = -\left(-\dfrac{4}{2}\right) = 2 \\ \beta = -\dfrac{E}{2} \Rightarrow \beta = 0 \\ r = \sqrt{\left(2^2 + 0^2 + 5\right)} \Rightarrow r = 3 \end{cases}$$

PARÁBOLA.

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado Foco y de una recta fija que recibe el nombre de Directriz.

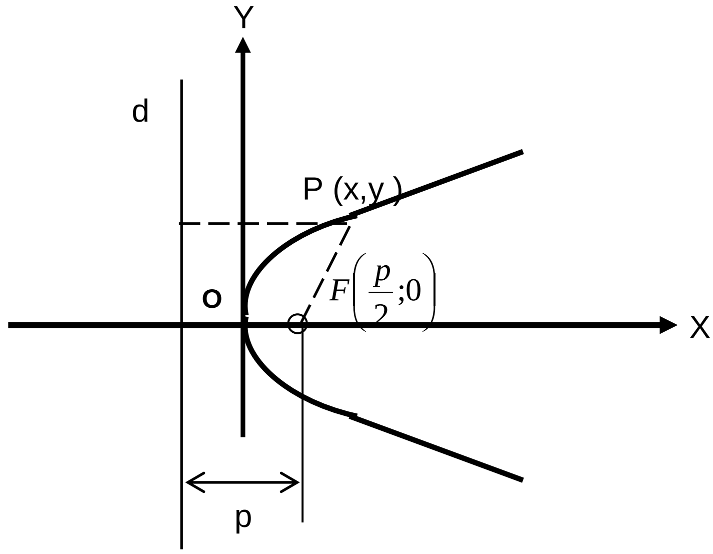


La definición precedente permite construir la parábola por puntos cuando se conoce el foco **F** y la directriz **d**. Trazando por **F** una recta perpendicular a la directriz determinamos el punto **D**. El punto medio de $\overline{FD}$ es punto de la curva, llamémoslo **O**, ya que $\overline{DO} = \overline{OF}$. Para encontrar otros puntos, consideramos un punto cualquiera **H** sobre la recta que contiene $\overline{DF}$ y se traza por **H** la recta $m//d$, haciendo centro en **F** y con radio $\overline{DH}$ se corta a la recta **m** en los puntos P_1 y P_2 que pertenecen a la parábola; $\overline{QP_1} = \overline{P_1F}$.

Si queremos determinar otros puntos repetimos el procedimiento.

Ecuación:

Hallaremos la ecuación para la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco en el eje **x** positivo.



Llamando p la distancia de la directriz al foco $\Rightarrow$ $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ la ecuación de la directriz será: $x=-\frac{p}{2}$

De acuerdo a la definición: $\overline{FP}=\overline{QP}$

$$\overline{FP}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \qquad \overline{FP}=\frac{p}{2}+x$$

resultando:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x$$

elevando al cuadrado:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

desarrollando y simplificando obtenemos:

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + 2\frac{p}{2} + x^2 \Rightarrow \boxed{y^2 = 2px}$$

Ecuación canónica de la parábola con vértice en el Origen y eje focal horizontal.

p: recibe el nombre de parámetro y es la distancia del foco a la directriz.

$$\boxed{y = \pm\sqrt{2px}}$$

Forma explícita de la ecuación.

Para cada valor de **x** mayor que cero se obtienen dos valores iguales y contrarios de **y,** por esta razón la curva resulta simétrica con respecto al eje **x** que se denomina eje de la curva.

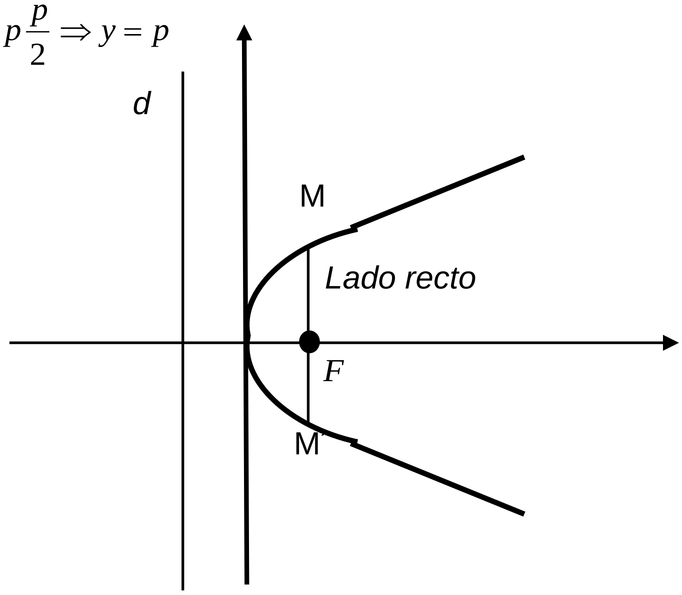
Dicho de otra forma: en la ecuación canónica de la parábola se observa que la variable **y** está elevada al cuadrado y no aparece a la potencia uno. Ello significa que para dos valores opuestos de **y** se obtiene el mismo valor de **x**, lo que en términos geométricos se traduce diciendo que la curva es simétrica con respecto al eje **x**.

Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje focal, que pasando por el foco une dos puntos de la curva.

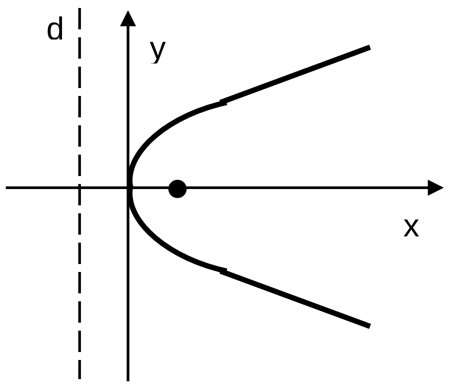
Lado recto $= \overline{MM'} = 2y$

$y = \sqrt{2px} \Rightarrow$ *como:* $x = \frac{p}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2p\frac{p}{2}} \Rightarrow y = p$

Lado recto $\overline{MM'} = 2p$



Posiciones:

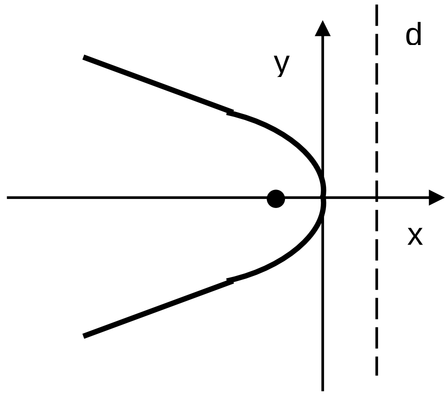


Ecuación: $y^2 = 2px$

Ejemplo: $y^2 = 4x$

Foco: $\left(\frac{p}{2};0\right)$

Directriz: $x = -\frac{p}{2}$

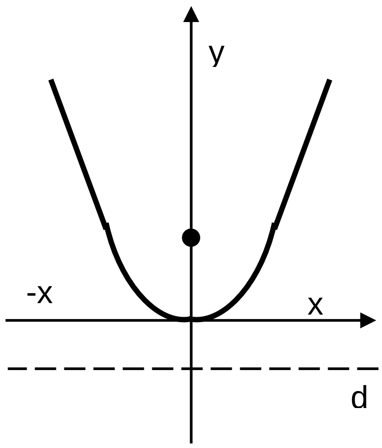


Ecuación $y^2 = 2px$

Ejemplo: $y^2 = -4x$

Foco: $\left(-\frac{p}{2};0\right)$

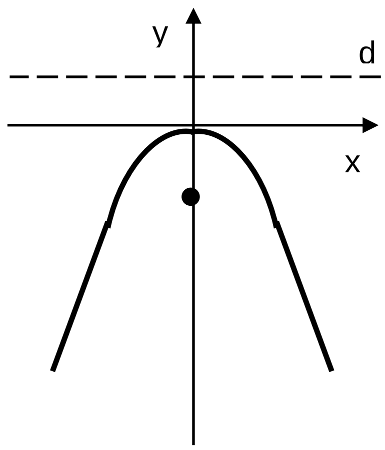
Directriz: $x = \frac{p}{2}$



Ecuación: $x^2 = 2py$
Ejemplo: $x^2 = 4y$

Foco: $\left(0;\frac{p}{2}\right)$

Directriz: $y = -\frac{p}{2}$



Ecuación: $x^2 = 2py$
Ejemplo: $x^2 = -4y$

Foco: $\left(0;-\frac{p}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{p}{2}$

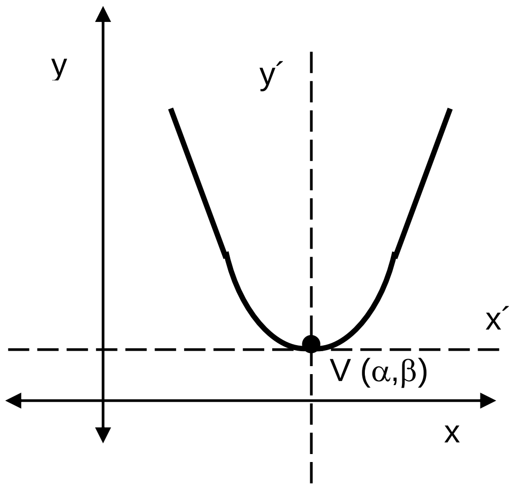
Ecuación de la parábola referida a un sistema de ejes paralelos a los ejes coordenados.

De la ecuación :

$x^2 = 2py \Rightarrow y = \frac{1}{2p}x^2;$ $\quad si: \frac{1}{2p} = a \Rightarrow \boxed{y = ax^2}$

La ecuación de la parábola de vértice V ($\alpha;\beta$) y eje paralelo al eje y es :

$$y' = ax'^2$$



Con respecto al sistema " x ; y " la ecuación de la parábola será:

como;
$$x' = x - \alpha$$
$$y' = y - \beta$$

sustituyendo en (1) : $\boxed{y - \beta = a(x - \alpha)^2}$

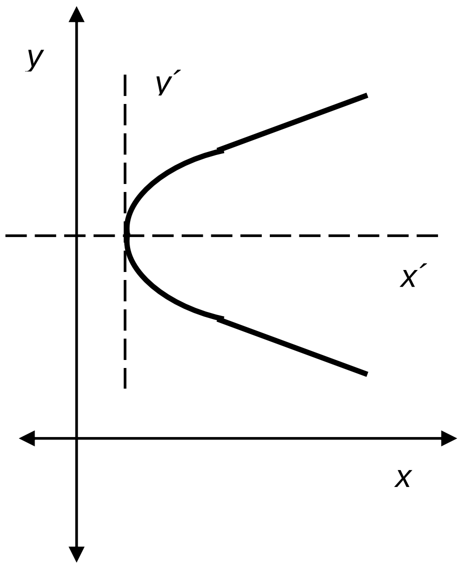
$$\Rightarrow y = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$$

si:
$$-2a\alpha = b \quad \wedge \quad a\alpha^2 + \beta = c$$

$$\boxed{\Rightarrow y = ax^2 + bx + c}$$

*Si el eje de la parábola es paralelo al eje **x** y el vértice es* $V(\alpha;\beta)$ *su ecuación es :*

$$\boxed{x' = ay'^2}$$



Y respecto al sistema ***" x ; y "*** *:* $\boxed{x-\alpha = a(y-\beta)^2}$

$$\Rightarrow x = ay^2 - 2a\beta y + a\beta^2 + \alpha$$

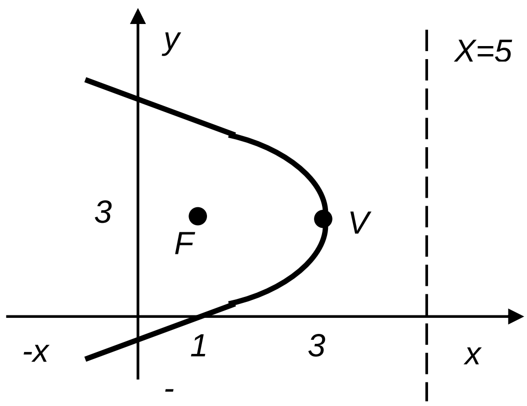
si: $-2a\beta = b \;\wedge\; a\beta^2 + \alpha = c$

$$\Rightarrow \boxed{x = ay^2 + by + c}$$

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la parábola cuyo foco está en (1 ; 3) y su directriz es
x = 5. De acuerdo al esquema vemos que el vértice V tiene por coordenadas (3 ; 3).
Su ecuación es de la forma:

$$(y-\beta)^2 = -2p(x-\alpha)$$
$$\Rightarrow (y-3)^2 = -2 \bullet 2(x-3)$$
$$(y-3)^2 = -4 \bullet (x-3)$$
$$(y-3)^2 + 4x - 12 = 0$$



ELIPSE.

Es el conjunto de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante.

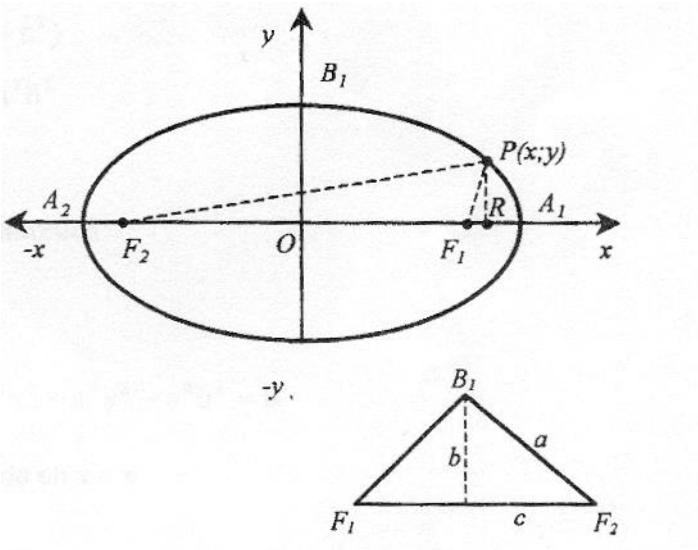
Siendo F_1 y F_2 focos de la elipse y P un punto genérico perteneciente a la elipse

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

Elementos:

Eje mayor: $\overline{A_1A_2} = 2a$; (si suponemos que la línea punteada F_2PF_1 es un hilo inextensible, cuando el punto P toma la posición de A_1 resulta sencillo verificar por la igualdad de los segmentos A_2F_2 y A_1F_1 que la longitud de dicho hilo es $A_1A_2 = 2A_10 = 2a$)

Semieje mayor: $\overline{A_1O} = \overline{OA_2} = a$;



Eje menor: $\overline{B_1B_2} = 2b$;

Semieje menor: $\overline{B_1O} = \overline{OB_2} = b$;

Vértices: $A_1(a;0); A_2(-a;0); B_1(0;b); B_2(0;-b)$;

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$;

Semieje focal: $\overline{F_1O} = \overline{OF_2} = c$;

Focos: $F_1(c;0); F_2(-c;0)$;

$B_1 \in$ a la elipse y satisface la condición: $\overline{F_1B_1} + \overline{B_1F_2} = 2a$

como $\overline{F_1B_1} + \overline{B_1F_2} = a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$.

Ecuación:

$P(x;y) \in$ a la elipse $\Rightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (1) aplicando el Teorema de Pitágoras en $\overset{\Delta}{PRF_1}$ y $\overset{\Delta}{PRF_2}$ respectivamente:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \wedge \overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

reemplazando en (1) : $\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

aislando la primera de las raíces cuadradas y elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + y^2$$

agrupando, simplificando y elevando al cuadrado:

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 = \left(a^2 + cx\right)^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

agrupando variables: $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$$\Rightarrow x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

como: $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

dividiendo por a^2b^2 obtenemos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación canónica de la elipse de centro en el origen de coordenadas y eje focal x.

La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser escrita como : $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$
que es un caso particular de la ecuación de 2º grado en **x** e **y**.

Forma explícita de la ecuación de la elipse.

De la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ despejamos **y** $\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ **;** donde observamos que tendremos valores reales de **y** si $a^2-x^2\geq 0$:

Si

$$a^2-x^2\geq 0 \Rightarrow a^2\geq x^2 \Rightarrow x^2\leq a^2 \Rightarrow |x|\leq a \Rightarrow -a\leq x\leq a$$

De donde $\begin{cases} x=-a \\ x=a \end{cases}$ rectas que limitan la elipse.

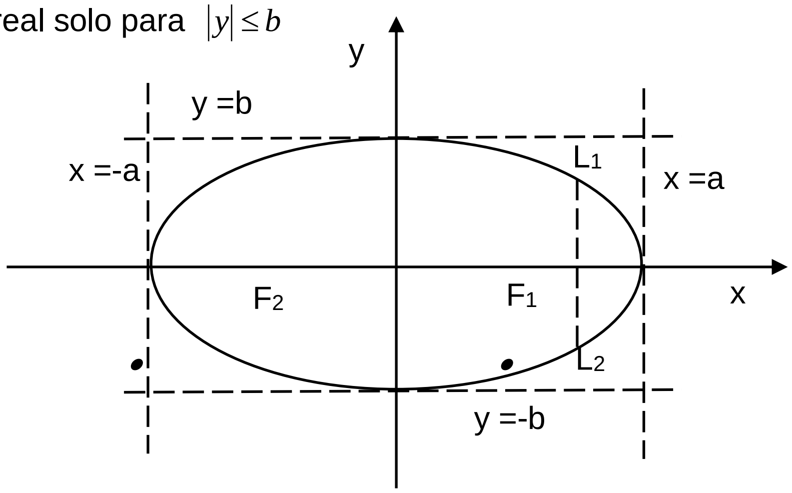
Entonces **y** es real solo para $|x|\leq a$.

Si de la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ despejamos **x** : $\Rightarrow x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

Para valores reales de x: $b^2-y^2\geq 0 \Rightarrow -b\leq y\leq b$

de donde $\begin{cases} x=b \\ x=-b \end{cases}$ rectas que limitan la elipse.

Entonces **x** es real solo para $|y|\leq b$



Del estudio de la figura precedente deducimos:

1: La elipse es simétrica respecto al origen y a los ejes coordenados por estar las variables de su ecuación canónica elevadas al cuadrado y no aparecer a la potencia uno.

2: La elipse es interior al rectángulo limitado por las rectas : $x=\pm a \wedge y=\pm b$

Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje focal que une dos puntos de la elipse.

$Lr = \overline{L_1L_2}$; como $\overline{L_1L_2} = \overline{L_1F_1} + \overline{F_1L_2}$ y $\overline{L_1F_1} = \overline{F_1L_2} \Rightarrow Lr = 2\overline{L_1F_1}$

$\overline{L_1F_1} = y$; considerando la ecuación explícita de la elipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

reemplazando " x " por " c" :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a} \Rightarrow 2y = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow Lr = \frac{2b^2}{a}$$

Excentricidad.

Es el cociente $\frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{c}{a}$; *como* $c < a \Rightarrow e < 1$

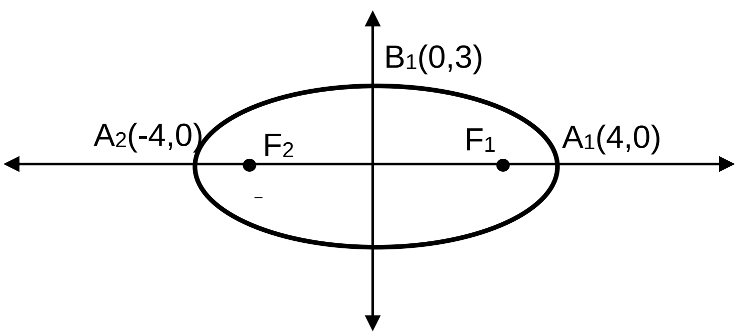
$Si\ c = 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow$ los focos coinciden y la curva es una circunferencia.

Posiciones.

Dada una elipse mediante su ecuación canónica, el eje mayor (eje focal) corresponde al eje coordenado de la variable que tiene mayor denominador.

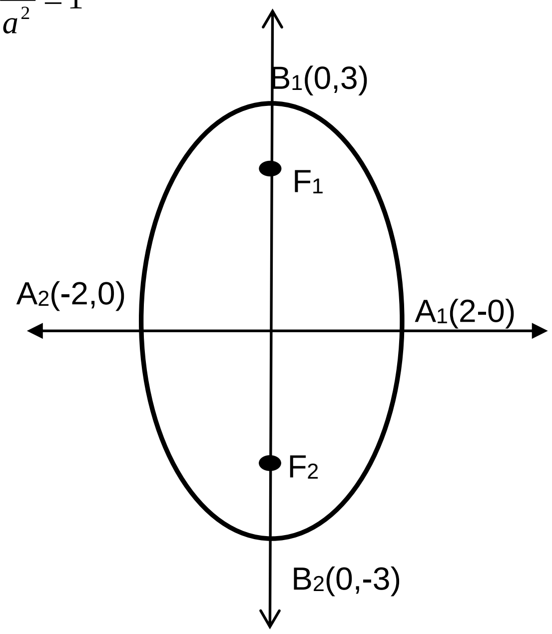
1.- Eje mayor sobre el eje **x**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ejemplo: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$



2.- Eje mayor sobre el eje ***y*** *:* $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Ejemplo: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$



<u>Construcción de la elipse:</u>

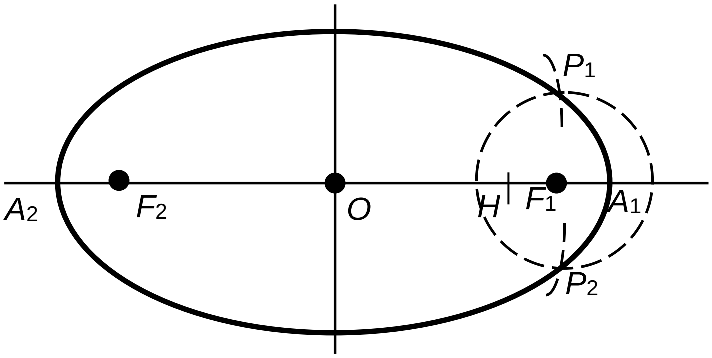
1.- <u>Aplicando la definición.</u>

Dados $F_1;F_2 \quad y \quad 2a$ construiremos por puntos la elipse. Marcamos sobre una recta **F_1** y **F_2** y su punto medio **O** ; equidistantes a **O** los puntos A_1 y A_2 tales que $\overline{A_2}\overline{O}=\overline{O}\overline{A_1}=a$. Los puntos A_1 y A_2 son puntos de la elipse ya que:

$$\overline{A_1}\overline{F_1}+\overline{A_1}\overline{F_2}=2a \qquad \text{y} \qquad \overline{A_2}\overline{F_2}+\overline{A_2}\overline{F_1}=2a$$

Para hallar otros puntos que pertenezcan a la elipse marcamos un punto cualquiera **H** interior al segmento $\overline{F_1}\overline{F_2}$.
El segmento $\overline{A_1}\overline{A_2}$ queda dividido en dos partes : $\overline{A_2}\overline{H}\wedge\overline{HA_1}$. Haciendo centro en F_1 con radio $\overline{HA_1}$ trazamos una circunferencia; haciendo centro en F_2 con radio $\overline{A_2}\overline{H}$ trazamos otra circunferencia. Los puntos de intersección P_1 y P_2 son puntos de la elipse ya que sus radios vectores suman 2a

$$\overline{A_1}\overline{H}+\overline{HA_2}=2a$$



Al variar la posición del punto H, en el segmento $\overline{F_1}\overline{F_2}$ podemos obtener otros puntos de la elipse.

I. <u>Relación de afinidad.</u>

La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$$\Rightarrow y_e = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (1)$$

La ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2=a^2$

$$\Rightarrow y_c = \pm\sqrt{a^2-x^2} \qquad (2)$$

$y_e =$ ordenada de la elipse.

$y_c =$ ordenada de la circunferencia.

Comparando (1) y (2): $\Rightarrow \boxed{y_e = \frac{b}{a}y_c}$

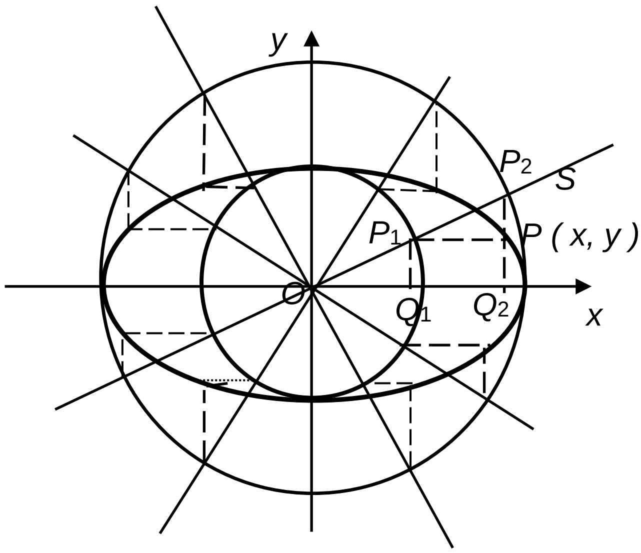
Esta es la relación de afinidad, en la que se basa un método de construcción de la elipse.

Construcción:

Trazamos dos circunferencias concéntricas de centro O y radios a y b respectivamente. Luego una semirecta de origen O que corta a las circunferencias en los puntos P_1 y P_2 respectivamente, trazando por P_1 una paralela al eje x y por P_2 una paralela al eje y; el punto P de intersección pertenece a la elipse.

Como $OQ_1P_1 \approx OQ_2P_2$

$$\Rightarrow \frac{\overline{Q_1}\,\overline{P_1}}{\overline{Q_2}\,\overline{P_2}} = \frac{\overline{O}\,\overline{P_1}}{\overline{O}\,\overline{P_2}}$$



Pero
$$\begin{cases} \overline{Q_1}\,\overline{P_1} = \overline{Q_2}\,\overline{P} = y_e \\ \overline{Q_2}\,\overline{P_2} = y_c \\ \overline{O}\,\overline{P_1} = b \\ \overline{O}\,\overline{P_2} = a \end{cases}$$

Luego: $\dfrac{y_e}{y_c} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow y_e = \dfrac{b}{a} y_c$

Trazando otras semirectas de origen **O**, encontramos otros puntos de la elipse.

La justificación de que los puntos así hallados pertenecen a una elipse es relativamente sencilla:

Los segmentos OP_1 y OP_2 de la figura precedente son respectivamente los radios de las dos circunferencias trazadas tomando como diámetros de las mismas 2b y 2a. Si llamamos α al ángulo que el sentido positivo del eje **x** forma con dichos radios, quedan formados los triángulos rectángulos OP_1Q_1 y OP_2Q_2 para los cuales valen las siguientes relaciones:

$$\frac{\overline{O}\,\overline{Q_2}}{\overline{O}\,\overline{P_2}} = \frac{x}{a} = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \frac{\overline{Q_1}\,\overline{P_1}}{\overline{O}\,\overline{P_1}} = \frac{y}{b} = \operatorname{sen}\alpha$$

elevando al cuadrado las expresiones anteriores y sumando miembro a miembro:

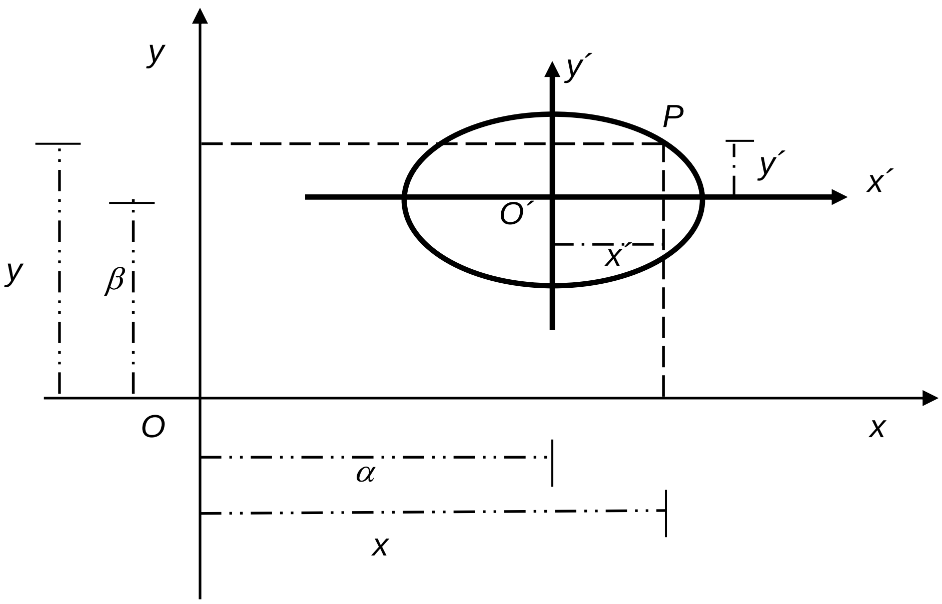
$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha \quad ; \quad \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

$$y \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ es la ecuación de una elipse.}$$

Ecuación de la elipse referida a un sistema de ejes paralelos a los ejes coordenados.

Los ejes **x´** e **y´** son ejes paralelos a los eje **x**; y. **P** es un punto de la elipse que tiene coordenadas (x´; y´) respecto al sistema de origen **O´**(α, β) y coordenadas (x , y) respecto al sistema de origen **O**.



La ecuación de la elipse es: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ cuando se refiere al sistema O´(x´;y´).

Como $\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

ecuación de la elipse de centro en $(\alpha;\beta)$ y eje focal paralelo al eje x.

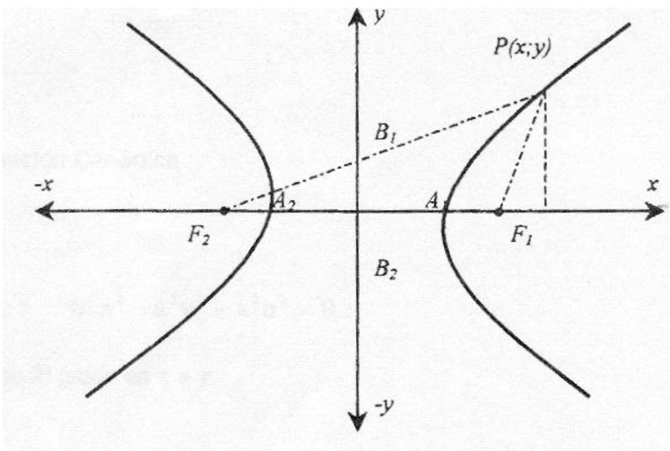
Si el eje focal es paralelo al eje y la correspondiente ecuación resulta:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

HIPÉRBOLA.

Es el conjunto de puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante.

Si F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola, para todo punto P perteneciente a la hipérbola se verifica: $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$



Elementos:

Eje focal o transverso: $\overline{A_1A_2} = 2a$;

Eje conjugado, ideal o imaginario: $\overline{B_1B_2} = 2b$;

Vértices: $A_1(a;0)$; $A_2(-a;0)$; $B_1(0;b)$; $B_2(0;-b)$

Distancia focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$;

Focos: $F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$;

$$\left.\begin{array}{r}\overline{F_1F_2} = 2c \\ \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a\end{array}\right\} \Rightarrow 2c > 2a \Rightarrow c > a$$

Ecuación.

Como $P(x, y) \in$ *a la hipérbola* $\Rightarrow \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \wedge \overline{PF_1} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

reemplazando: $\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

aislando la primera de las raíces del primer miembro y elevando luego ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

desarrollando los cuadrados y agrupando:

$$4cx - 4a^2 = 4a \bullet \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

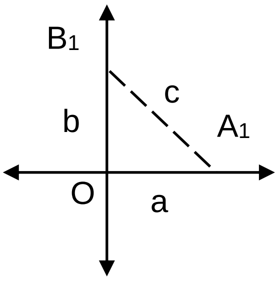
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

agrupando variables:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \Rightarrow x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

En B_1OA_1;
$b^2 = c^2 - a^2$



dividiendo por a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación canónica de la hipérbola de eje focal x y centro en el origen de coordenadas.

La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser escrita como : $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; que es un caso particular de la ecuación de 2º grado en **x** e **y**.

Si de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ despejamos **y** :

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

la última expresión nos permite observar que la curva es simétrica respecto al eje **x**. Con respecto a **y** podemos decir que toma valores reales para **x** variando de menos a más infinito, con excepción de intervalo $|x| < a$, en el qlue " **y**" toma valores imaginarios; " **x** " varía:

$$\begin{cases} -\infty < x \leq -a \\ a \leq x < \infty \end{cases}$$

resultando una curva externa a la faja limitada por las rectas:

$$\begin{cases} x = -a \\ x = a \end{cases}$$

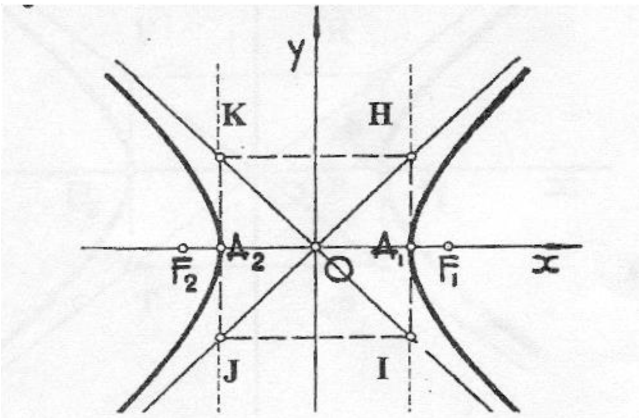
Despejando x:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$$

se verifica que la curva es simétrica respecto al eje y:

Si: $y = 0 \Rightarrow x = \pm a$

Entonces la curva corta al eje x en los puntos : $A_1(a;0)$ y $A_2(-a;0)$ vértices y determinan $\overline{A_1A_2} = 2a$; que es la longitud del eje focal.



El rectángulo **HIJK** de centro **O** y lados perpendiculares a los ejes, se denomina: rectángulo fundamental de la hipérbola.

Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje coordenado, que pasando por el foco, une dos puntos de la hipérbola: $\overline{L_1L_2}$

$\overline{L_1L_2} = 2y$: $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ en $L_1(c;y)$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a}$$

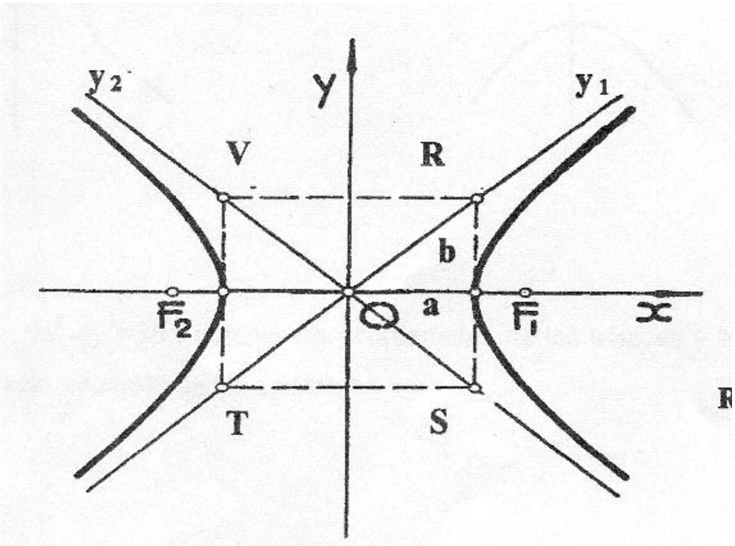
$$\therefore 2y = 2\frac{b^2}{a} \Rightarrow \overline{L_1L_2} = 2\frac{b^2}{a}$$

Excentricidad:

Es el cociente $\frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{c}{a}$, *como* $c > a \Rightarrow e > 1$.

Asíntotas de la hipérbola. Son las rectas que están sobre las diagonales del rectángulo fundamental: tienen como ecuaciones:

$$y_1 = \frac{b}{a}x \qquad ; \qquad y_2 = -\frac{b}{a}x$$



RSTV: rectángulo fundamental.

Se muestra que: $(y_a - y_b) \to 0$ cuando $x \to \infty$

En efecto: $y_a = \frac{b}{a}x$ (asíntota)

$y_b = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (hipérbola)

$d = y_a - y_b$

$$d = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad d = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\left(\frac{x^2 - x^2 - a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) = \frac{b}{a} \bullet \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty}(y_a - y_b) = \lim_{x \to \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0$$

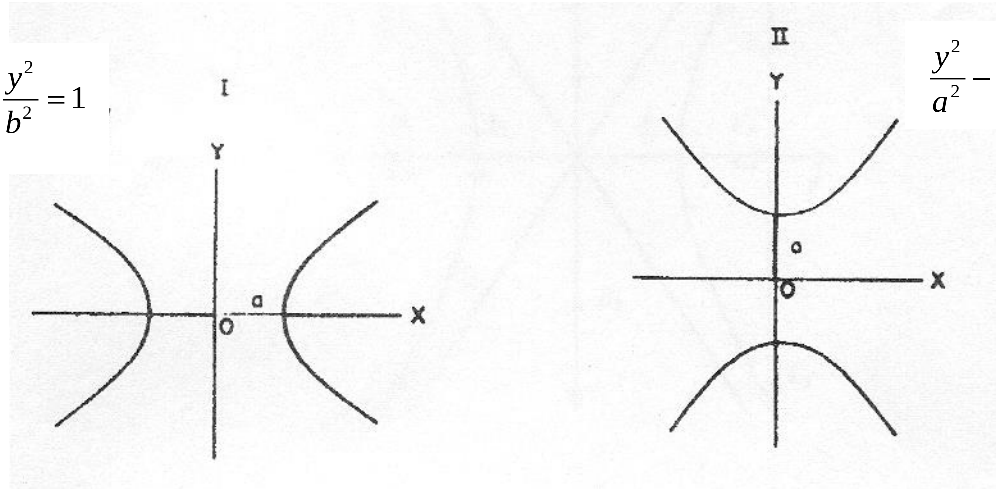
$$\therefore \quad si \quad x \to \infty \Rightarrow d \to 0$$

Posiciones.

El eje focal de la hipérbola, corresponde siempre a la variable de coeficiente positivo, no importando que a < b o a > b.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



Ejemplo:

Dada la ecuación $9x^2-4y^2=36$, obtener las coordenadas de los vértices y focos; excentricidad, longitud del lado recto, ecuación de las asíntotas.

$$9x^2-4y^2=36$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \quad \textbf{Ecuación canónica}$$

Solución:

Vértices: $a=2$ y b=3

$\Rightarrow \quad A_1(2;0); \quad A_2(-2;0); \quad B_1(0;3); \quad B_2(0;-3);$

Focos:

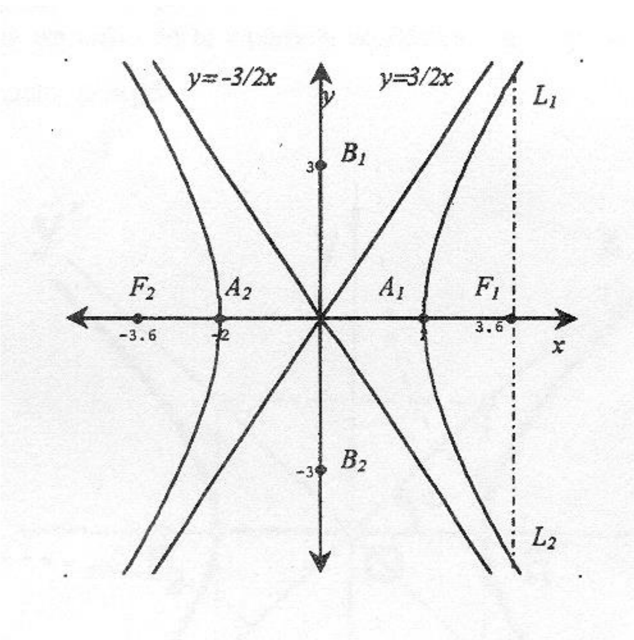
$$c=\sqrt{a^2+b^2}\cong 3{,}6 \Rightarrow F_1(3{,}6;\ 0);\ \ F_2(-3{,}6;\ 0)$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{3{,}6}{2} = 1{,}8$

Lado recto: $\overline{L_1 L_2} = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \overline{L_1 L_2} = 9$

Ecuación de las asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} \Rightarrow y_1 = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad y_2 = -\frac{3}{2}$

Gráfico:



Hipérbola Equilátera.

Cuando una hipérbola tiene a = b recibe el nombre de hipérbola equilátera; el rectángulo fundamental es un cuadrado y las asíntotas son perpendiculares entre sí.

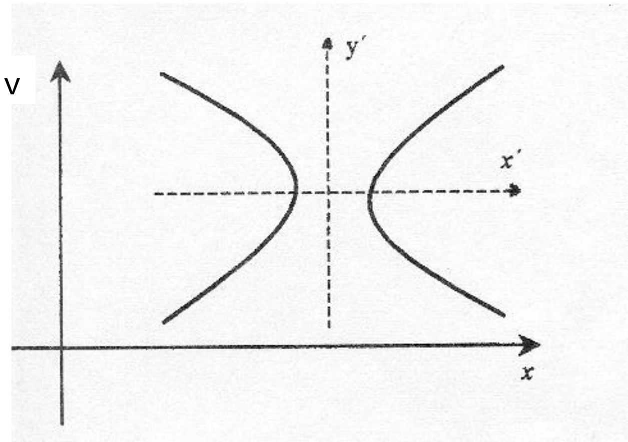
Si a = b la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1;$$

es decir: $x^2 - y^2 = a^2$;

con asíntotas: $y = x$, $y = -x$

Ecuación de la hipérbola referida a un sistema de ejes paralelos desplazados (sin rotar).



La ecuación de la hipérbola referida al sistema x´y´ es : $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$

Utilizando las fórmulas de traslación de ejes: $\begin{cases} x' : x-\alpha \\ y' = y-\beta \end{cases}$

resulta: : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ que corresponde a la ecuación de la hipérbola cuyo centro es el punto $C(\alpha;\beta)$ y cuyo eje focal es paralelo al eje x.

Si el eje focal es paralelo al eje y, su ecuación es:

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$$

Ejemplos:

1. Representar gráficamente la cónica de ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

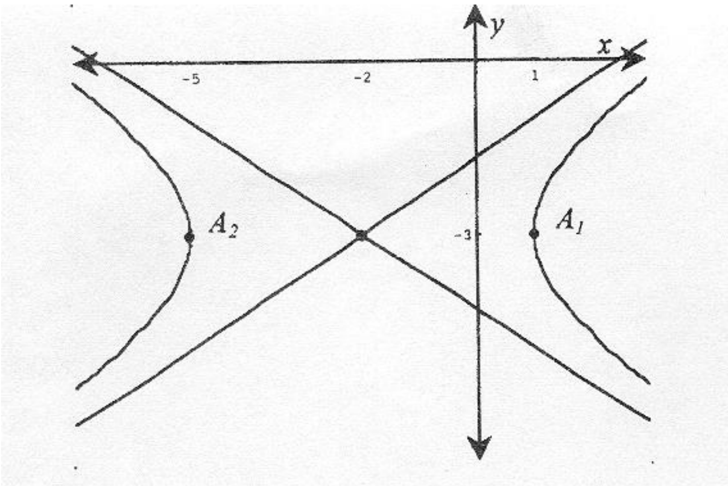
Coordenadas del centro: $(\alpha;\beta)=(-2;-3)$

Eje focal: $F_1F_2 \perp y$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow A_1(1;-3); \quad A_2(-5;-3)$



2. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $(2;0)$ y $(2;-6)$; con un extremo del eje conjugado en $(3;-3)$.

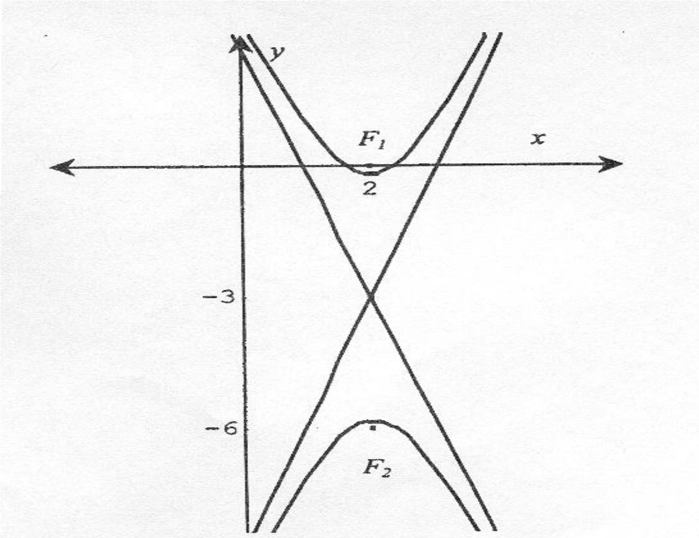
De acuerdo con los datos: $F_1F_2 \perp x$

Responde a la ecuación: $\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} - \dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$

El centro es punto medio del segmento que une los focos $(\alpha,\beta) = (2;-3)$

$$\begin{cases} a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 - 1^2 \Rightarrow a^2 = 8 \\ b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 3^2 - 8^2 \Rightarrow b^2 = 1 \end{cases}$$

Ecuación: $\frac{(y+3)^2}{8^2} - \frac{(x-2)^2}{1^2} = 1$



TRABAJO PRÁCTICO

1) Escribir la ecuación de la circunferencia de centro en (-3,-5 y radio r = 3.

2) Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos de coordenadas A(2,3) y B(-4,5). Hallar la ecuación de la curva.

3) Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(7,-6) y que pasa por el punto P(2,2).

4) Hallar la circunferencia de centro C(2,-4) y que es tangente al eje y.

5) Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es:
$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0$.

6) Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco en el punto (4,0).

7) Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco en el punto (0,-3).

8) Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz de ecuación
$y - 5 = 0$

9) Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz de ecuación
$X + 3 = 0$.

10) Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje x pasa por el punto (-2,4). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

11) Hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos, en las elipses, cuyas ecuaciones son:

$9x^2 + 4y^2 = 36$ $\qquad$ $16x^2 + 25y^2 = 400$

$4x^2 + 9y^2 = 36$ $\qquad$ $x^2 + 3y^2 = 6$

12) Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4,0), (-4,0) y cuyos focos son los puntos (3,0); (-3,0)

13) Los vértices de una elipse son los puntos (0,6) ; (0,-6) y sus focos son los puntos (0,4);(0,-4). Hallar su ecuación.

14) Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (2,0);(-2,0) y su excentricidad es igual a 2/3.

15) La ecuación de una elipse es $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. Determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

16) Para las ecuaciones de las siguientes hipérbolas hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y no transverso, la excentricidad y la longitud de cada lado recto.

a) $9x^2 - 4y^2 = 36$ $\qquad$ b) $9y^2-4x^2 = 36$

c) $4x^2 - 9y^2 = 36$ $\qquad$ d) $x^2 - 4y^2 = 4$

16) Los vértices de una hipérbola son los puntos (2,0); (-2,0) y sus focos son los puntos de coordenadas (3,0) y (-3,0). Hallar su ecuación y su excentricidad.

17) El centro de una hipérbola está en el origen y su eje transverso está sobre el eje y. Si un foco es el punto (0,5) y la excentricidad es igual a 3, hallar la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

18) Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso está sobre el eje y. La longitud de cada lado recto es 2/3 y la hipérbola pasa por el punto (-1,2). Hallar su ecuación.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

SUPERFICIES

INTRODUCCIÓN:

Nadie puede poner en duda que en todas las carreras técnicas se considera conveniente un acercamiento a las Geometrías, sobre todo en aquellas que como la Arquitectura necesitan un dominio de los aspectos espaciales donde se instalarán o construirán los ingenios creados en los talleres de diseño.

Desde hace algunos años ha sido nuestra preocupación el estudio metodológico de la enseñanza de la Geometría, en particular de aquellos problemas del espacio tridimensional que presentan un importante grado de dificultad en la visualización y en el aprendizaje.

Entre los problemas que se presentan en dicho espacio, con excepción de los planos, los cilindros y los conos, de estudio relativamente sencillo, resulta de significativo interés obtener una metodología que permita, a través del conocimiento de su ecuación, la generación gráfica de cualquier superficie.

En prácticamente la totalidad de la literatura que trata el tema, pueden verse "dibujadas" las superficies y un "estudio analítico" de las mismas consistente en un conjunto de fórmulas que sólo sirven a los efectos de "verificar" la validez del gráfico presentado; dicho de otra forma, “los textos de uso corriente efectúan la presentación de figuras que anticipan, sin construcción analítica acorde previa, la forma geométrica a obtener”, lo que conduce a "justificar" la correspondencia de una gráfica preelaborada con su ecuación, realizando un estudio "contra natura" que nuestro esquema de trabajo pretende desterrar.

El método que proponemos presenta una cierta analogía con el utilizado en Medicina para efectuar Tomografías Computadas y consiste en cortar la superficie que se estudia “cuya forma nos es desconocida” con un plano, “tratando” de
visualizar forma de la curva intersección de modo tal que nos permita ir "generando" la superficie paso a paso.

La primera dificultad que se presenta es que al no conocerse la forma de la superficie en estudio, resulta imposible

“ver” la forma de la curva resultante de la intersección; esta contingencia nos ha llevado a modificar el sistema de ecuaciones mixto (expresión analítica de la curva común a ambas superficies), reemplazando la ecuación cuyo lugar geométrico pretendemos encontrar por otra, obtenida mediante una combinación de las ecuaciones del sistema primitivo que arroje como resultado la ecuación de un cilindro o la de una cuádrica "degenerada" (por ejemplo un par de planos), lográndose de este modo, al cortar la “superficie de reemplazo” con un plano, "ver" de una manera sencilla la forma de la curva intersección.

“Cambiar una superficie por otra, que pase por la curva intersección y que por su conocimiento previo y su sencillez tenga la propiedad de permitirnos ver la forma de dicha curva, es la razón de ser del método que a continuación se describe”.

Sabido es que en Geometría existen dos problemas fundamentales que pueden plantearse de manera simple con los siguientes esquemas:

1.- Dado un lugar geométrico por medio de las condiciones que verifican los puntos que le pertenecen, hallar su ecuación.

2.- Dada la ecuación de un lugar geométrico, construir su gráfica.

En el espacio bidimensional (el plano) no existe dificultad de entendimiento porque la percepción es visual y en consecuencia puede adoptarse cualquiera de los esquemas descriptos: siguiendo el primero de ellos, podemos definir como lugar geométrico una línea y, a partir de esta definición obtener la correspondiente ecuación; mientras que, de acuerdo a la segunda metodología, podemos escribir la ecuación general de segundo grado en dos variables $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (que corresponde como expresión más general a las cónicas desplazadas y rotadas) y, mediante una traslación y una rotación adecuadas llegar a las ecuaciones canónicas que, explicitadas, permiten bajo ciertas condiciones de entorno (campo de definición, etc...) graficar la curva estudiada.

En el espacio tridimensional no resulta posible describir todas las superficies como lugar geométrico (sólo los planos, la esfera, los cilindros y los conos tienen esa propiedad) y en consecuencia el único recurso abordable es escribir la ecuación general de segundo grado en tres variables,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

y luego mediante rotaciones y traslaciones realizadas por completamiento de cuadrados que resulten adecuadas, llegar a:

$$A'' x''^2 + B'' y''^2 + C'' z''^2 + J = 0 \quad \text{(forma canónica de las cuádricas con centro).}$$

ó

$$A'' x''^2 + B'' y''^2 + Iz = 0 \qquad \text{(forma canónica de las cuádricas sin centro).}$$

Los casos particulares que pueden presentarse provienen de las distintas combinaciones de signos entre los coeficientes de los términos cuadráticos. Para las cuádricas con centro pueden escribirse las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \quad \text{SUPERFICIE ESFÉRICA}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ELIPSOIDE}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{.HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS}$$

y para las cuádricas sin centro**:**

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{PARABOLOIDE } \textit{ELIPTICO}$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{PARABOLOIDE HIPERBOLICO}$$

resultando en estos casos imposible desde el punto de vista práctico utilizar la metodología de explicitar las ecuaciones para poder graficar los lugares geométricos correspondientes por la gran cantidad de puntos que debemos dibujar a los efectos de aproximar la idea de la forma de la superficie.

Además, cuando queremos representar objetos que tienen su vigencia en el espacio tridimensional, se hace necesaria la reducción de una de las dimensiones para dibujar en el papel, lo que obliga a establecer códigos de visualización como las perspectivas, proyecciones, etc.

El método de "discusión" de la ecuación para "encontrar la forma": puede desarrollarse mediante los siguientes pasos:

1) Estudio de la Simetría, por observación de la ecuación correspondiente.
2) Verificación de la pertenencia o no del origen de coordenadas.
3) Estudio de la intersección con los ejes coordenados.
4) Estudio de la intersección con los planos coordenados.
5) Estudio de la intersección con planos paralelos a los planos coordenados.

Para realizar este estudio resulta imprescindible diferenciar correctamente que representa una determinada ecuación cuando la misma es considerada en diferentes espacios. Valga como ejemplo representativo la expresión **x – 2 = 0,** que considerada en el espacio unidimensional tiene como lugar geométrico un punto, en el espacio bidimensional una recta paralela al eje de ordenadas y en el espacio tridimensional un plano paralelo al plano coordenado **yz**.

Debe recordarse como concepto fundamental que en el espacio tridimensional, una curva cualquiera sólo puede expresarse en forma analítica como intersección de **al menos dos** de las infinitas superficies que se cortan según ella. Resulta **imposible** por lo tanto, **hablar de la ecuación de una curva en dicho espacio**. Recordemos que al tratar la recta en el espacio tridimensional, dedujimos **las ecuaciones cartesianas simétricas de la misma.**
Reforzamos este concepto con el siguiente

<u>Ejemplo</u>:

Las ecuaciones de la circunferencia del espacio ubicada sobre un plano paralelo al plano coordenado **xy,** de centro en **C(0,0,2)** y radio **r=2** pueden expresarse como

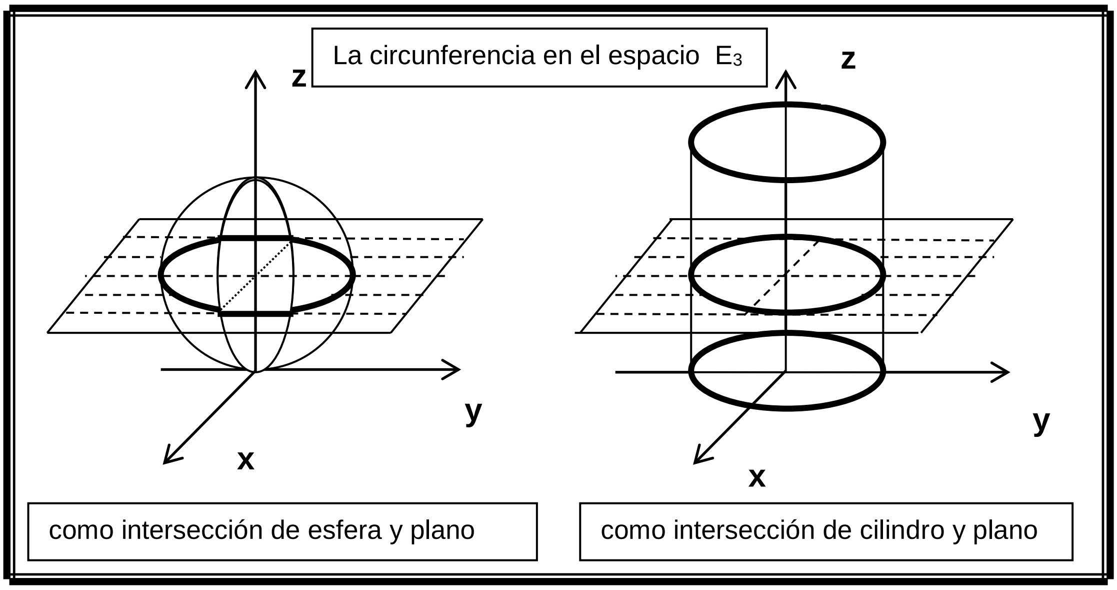
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4\,; & \text{esfera de centro } (0,0,2) \text{ y } r = 2 \\ z = 2\,; & \text{plano paralelo al plano xy que contiene al punto } (0,0,2) \end{cases}$$

Como puede comprobarse fácilmente, no es ésta la única manera de expresar **las ecuaciones** de la curva; si reemplazamos en la ecuación de la esfera la variable **z** por la constante **2** (cota a la cual se produce el corte, fijada por la ecuación del plano) resulta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \text{ ; que como veremos es la ecuación de un cilindro de eje z} \\ \text{z} = 2\text{ ;} \qquad \text{plano paralelo al plano xy} \end{cases}$$

verificándose que al reemplazar en la ecuación de la superficie que se estudia una de las variables por una constante, se obtiene la ecuación de un cilindro o en su defecto, como veremos, la ecuación conjunta de un par de planos.

Resulta posible entonces, al cortar una superficie cuya forma nos es desconocida con un plano paralelo a un plano coordenado, reemplazar su ecuación por la de un cilindro de forma conocida que contenga la curva intersección y , en consecuencia permita identificarla.



Para encarar la resolución de este tipo de problemas o bien a los efectos de encontrar la forma de la curva intersección entre dos superficies, resulta necesario el conocimiento de las siguientes:

FÓRMULAS DE IMPRESCINDIBLE CONOCIMIENTO PREVIO:

a) Ecuaciones correspondientes al espacio bidimensional (E^2):

a.1) Ecuaciones canónicas de las cónicas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 & \text{circunferencia.} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \text{elipse.} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \text{hipérbola.} \end{cases}$$

y

ecuación de la cónica sin centro:

$$\begin{cases} x^2 = 2py & \text{parábola.} \end{cases}$$

a.2) Ecuaciones de las cónicas desplazadas:

$$\begin{cases} (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 & \text{circunferencia con centro en } (h,k) \\ \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 & \text{elipse con centro en } (h,k) \\ \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 & \text{hipérbola con centro en } (h,k) \\ (x-h)^2 = 2p(y-k) & \text{parábola con vértice en } (h,k) \end{cases}$$

a.3) Ecuaciones de un par de rectas:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y) \bullet (x-y) = 0 \end{cases}$$

b) Ecuaciones del espacio tridimensional (E^3):

b.1) Ecuación general del plano y sus casos particulares:

$$\begin{cases}
Ax+By+Cz+D=0 & \text{Ecuación general del plano.} \\
Ax+By+Cz=0 & \text{Ecuación de un plano que contiene al origen del sistema de referencia} \\
Ax+By+D=0 & \text{Ecuación de un plano paralelo al eje z (la forma es análoga} \\
 & \text{a la de una recta en } E^2\text{).} \\
Ax+By=0 & \text{Ecuación de un plano que contiene al eje z (la forma es análoga} \\
 & \text{a la de una recta de } E^2 \text{ que contiene al origen).} \\
Ax+D=0 & \text{Ecuación de un plano paralelo al plano coordenado yz (la forma} \\
 & \text{es análoga a la de una recta de } E^2 \text{ paralela al eje y).} \\
Ax=0 & \text{Ecuación del plano coordenado yz (la forma es análoga a la de} \\
 & \text{la ecuación del eje y en } E^2\text{).}
\end{cases}$$

b.2) Ecuaciones de un par de planos:

$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y) \bullet (x-y) = 0$ (observar que la forma es análoga

a la del par de rectas para E_2.

b.3) Ecuaciones de cilindros y conos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ecuación de un cilindro de directriz circular y eje z (análoga a la ecuación} \\ \qquad \text{de la circunferencia en } E^2 \\ \qquad . \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ecuación de un cilindro de directriz elíptica (análoga a la ecuación de la} \\ \qquad \text{elipse en } E^2). \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ecuación de un cilindro de directriz hiperbólica (análoga a la ecuación de} \\ \qquad \text{la hipérbola en } E^2. \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ecuación conjunta de un par de planos:} \rightarrow \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) \bullet \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{ecuación de un cono de eje z.} \end{cases}$$

Con el conocimiento de las ecuaciones precedentes y sus correspondientes formas, estamos en condiciones de encarar la discusión de cualquier superficie.

Como hemos dicho, las superficies más sencillas son las superficies esféricas, los cilindros y los conos, que nos posibilitan como veremos, con gran sencillez, efectuar el estudio de superficies más complejas.

Comenzaremos entonces, con el tratamiento de estas superficies.

La superficie más sencilla del espacio tridimensional es la que se representa analíticamente de una manera general por una ecuación lineal en tres variables de la forma:
$Ax + By + Cz + D = 0$
cuyo lugar geométrico, como sabemos es un plano.

Puede demostrarse asimismo, por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos que una superficie esférica de radio r y con centro en el origen de coordenadas tiene analíticamente la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

De una manera general podemos decir que una superficie es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma:

F(x,y,z) = 0

estando las coordenadas de los puntos de la superficie restringidas a valores reales.

Se puede obtener una buena idea de la forma de una superficie estudiando sus secciones planas. Tales secciones se determinan cortando la superficie que se estudia por una serie de planos paralelos a los planos coordenados. Si, como sabemos, los planos paralelos al plano coordenado **xy** son de la forma **z = k,**

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ z = k \end{cases}$$

son las ecuaciones de la curva intersección de la superficie que se estudia con el plano.

Ejemplo 1: Estudio de la Superficie esférica.

Se define como tal al conjunto de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia entre cualquier punto de la superficie y el centro, recibe el nombre de radio.
Si el centro están en (α,β,γ), la ecuación correspondiente al lugar geométrico resultará:

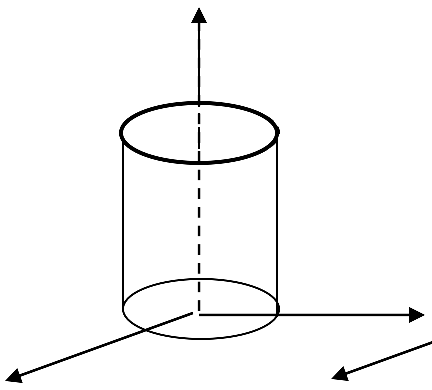
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$$

siendo como caso particular, cuando el centro está en el origen de coordenadas:

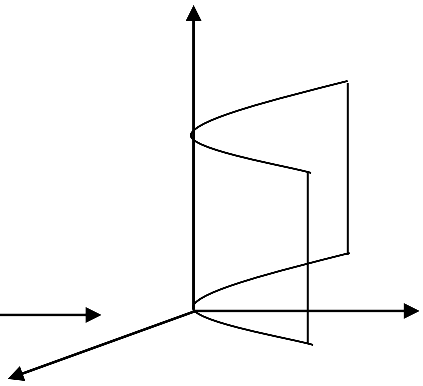
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Estudio de una superficie cilíndrica:

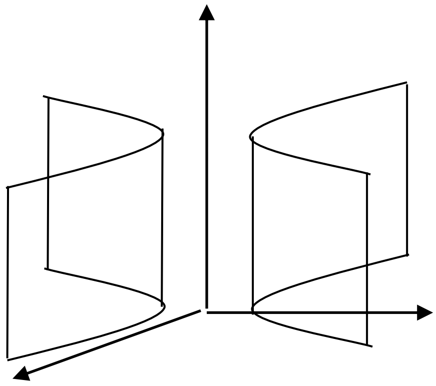
Recibe este nombre la superficie que es generada por una recta que se mueve manteniéndose paralela a una recta fija llamada generatriz y pasa siempre por una curva fija dada que recibe el nombre de directriz.
Para nuestro estudio particular consideraremos a la directriz como una curva perteneciente a uno de los planos coordenados y la generatriz como una recta perpendicular a dicho plano.



Cilindro circular o elíptico (de acuerdo con la forma de la directriz).

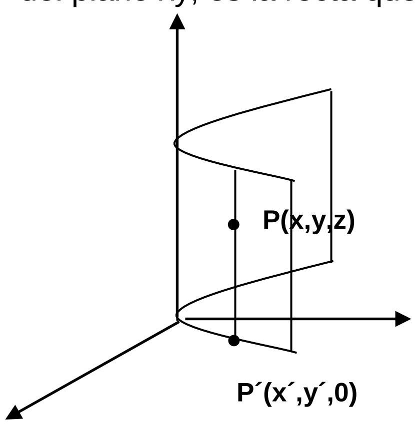


Cilindro de directriz parabólica.



Cilindro de directriz hiperbólica-

El lugar geométrico de los puntos P(x,y,z), tales que sus coordenadas xy son iguales a las de un punto P´del plano xy, es la recta que pasa por P´



y es paralela al eje z. Por consiguiente, una ecuación del espacio tridimensional que tenga como variables x,y es el lugar geométrico de un conjunto de rectas paralelas al eje z.

Generalizando este concepto: "una ecuación cuadrática del espacio tridimensional que carezca de una de las variables, tiene como lugar geométrico una superficie cilíndrica con directrices paralelas al eje que corresponde a la variable ausente".
La directriz es una curva que está sobre el plano coordenado perpendicular a la variable ausente en la ecuación, teniendo la curva en el espacio bidimensional la misma ecuación que la superficie en el espacio tridimensional.

Ejemplo:

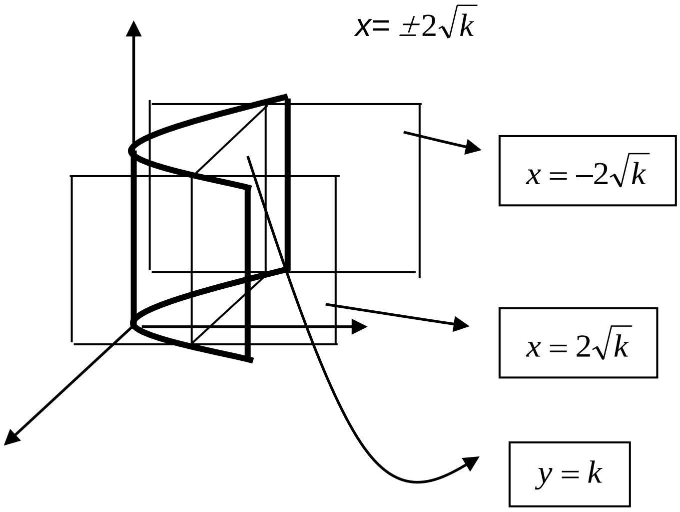
Determinar la forma de la superficie cuya ecuación es $\mathbf{x^2 = 4y}$

a) Intersección con planos paralelos al plano coordenado **xz.**

Las ecuaciones de los planos paralelos al plano xz son de la forma **y = k;** siendo la ecuación de la superficie $x^2 = 4y$, la intersección se obtendrá para

$$y = k$$

$$x = \pm 2\sqrt{k}$$



b) Intersección con planos paralelos al plano coordenado yz.

Son rectas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{4}k^2 \end{cases} \textit{(recta paralela al eje z)}$$

c) Intersección con planos paralelos al plano coordenado xy.

Los planos son de la forma z=k, resultando la curva intersección de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ z = k \end{cases}$$ (parábola de eje horizontal paralelo al eje y)

Para distintos valores de k, estas parábolas son iguales (es como si se tratara de un conjunto de parábolas "apiladas"). Resulta entonces que la superficie de ecuación $x^2 = 4y$ es una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje z.

Superficies cónicas:

Una superficie cónica está engendrada por una recta que se mueve de tal manera que pasa siempre por una curva fija plana llamada directriz y por un punto fijo que se denomina vértice y no está contenido en el plano de la curva.

El vértice divide a la superficie cónica en dos porciones distintas que reciben el nombre de rama, hoja o napa.

Actividad: Determinar la naturaleza de la superficie cuya ecuación es $\mathbf{x^2 + 16 y^2 - z^2 = 0}$
Graficar.

Desarrollamos a continuación un **ejemplo práctico completo de la discusión de una superficie** aplicado al estudio de la superficie de ecuación $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.

1) <u>Estudio de la Simetría</u>:

La ecuación de la superficie que pretendemos estudiar tiene las variables **x** e **y** elevadas únicamente al cuadrado, mientras que la variable **z** está elevada a la primera potencia: ello implica simetría espacial respecto de los planos **yz** y **xz,** es decir simetría respecto del eje **z**.

2) <u>Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de coordenadas.</u>

Las coordenadas del origen del sistema de referencia satisfacen la ecuación: el origen de coordenadas pertenece a la superficie.

3) <u>Intersección con los ejes coordenados:</u>

La intersección con los ejes coordenados se obtiene resolviendo el sistema mixto conformado por la ecuación de la superficie y las ecuaciones de cada uno de los ejes, respectivamente.

3.a) <u>Intersección con el eje x</u>:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \quad (1) \quad \wedge \quad y = 0 \quad (2) \wedge z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

reemplazando (2) y (3) en (1),

obtenemos: $\dfrac{x^2}{p} = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \wedge \quad z = 0\,;\ \text{o sea}: \{x = y = z = 0$

coordenadas del origen.

Las intersecciones con los otros ejes coordenados se resuelven de manera análoga; se obtiene como intersección el origen de coordenadas.

3.b) <u>Intersección con el eje y</u>:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \quad (1) \quad \wedge \quad x = 0 \quad (2) \wedge z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

reemplazando (2) y (3) en (1),

obtenemos: $-\dfrac{y^2}{q} = 0 \quad \wedge \quad x = 0 \quad \wedge \quad z = 0\,;\ \text{o sea}: \{x = y = z = 0$

coordenadas del origen.

3.c) Intersección con el eje z:

$$\left\{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (1) \quad \wedge \quad x=0 \quad (2) \wedge y=0 \quad (3)\right.$$

reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$2z=0 \quad \wedge \quad x=0 \quad \wedge \quad y=0; \text{o sea}: \{x=y=z=0$$

coordenadas del origen.

4. Intersección con los planos coordenados

4.a) Intersección con el plano coordenado xy:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0 \quad \wedge \quad z=0 \right. \Leftrightarrow \left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\bullet\left(\frac{x}{p}-\frac{y}{q}\right)=0 \quad \wedge \quad z=0$$

es un par de planos cortado con el plano xy $\rightarrow$ par de rectas en el plano coordenado xy (fig.1)

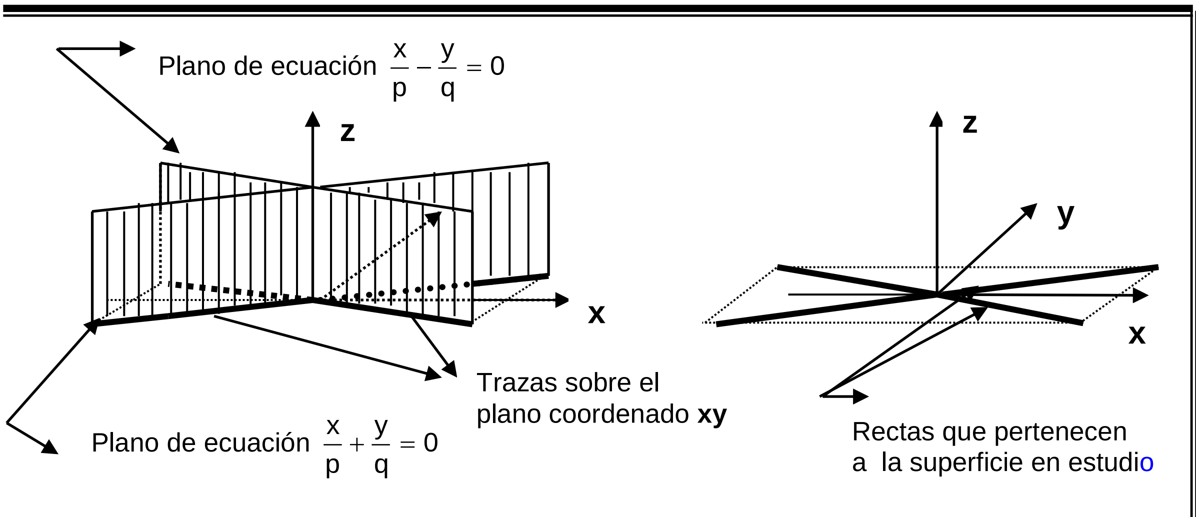


fig. 1

4.b) Intersección con el plano coordenado xz:

$\left\{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \wedge y=0\right.$ que equivale a : $\left\{\frac{x^2}{p}=2z \wedge y=0\right.$; o bien: $\{\ x^2=2pz \wedge y=0$

{cilindro parabólico cortado con el plano xz $\rightarrow$ parábola en E^3}. (fig. 2)

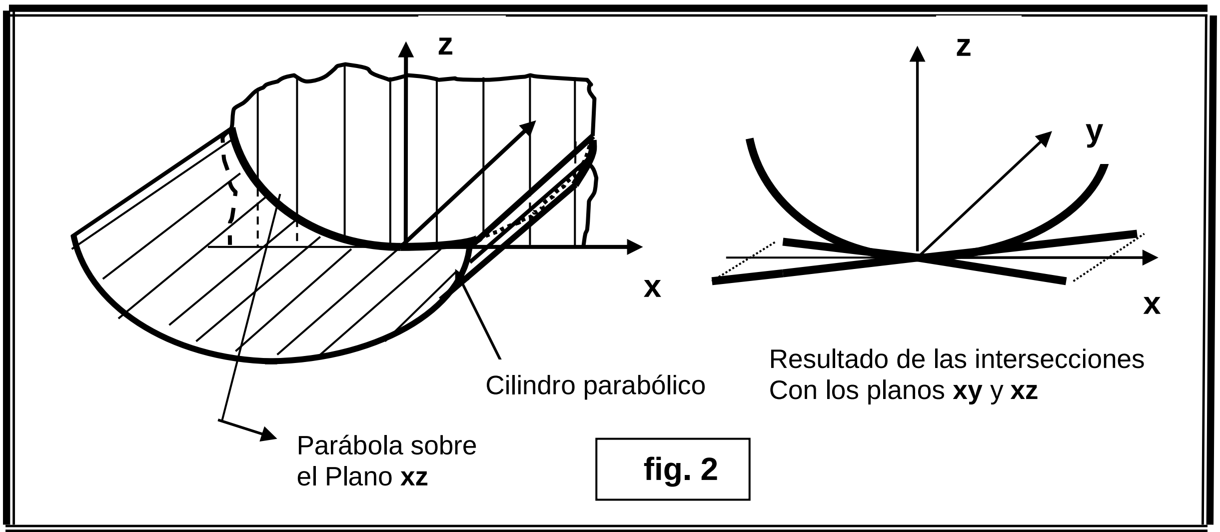


fig. 2

4.c) Intersección con el plano yz:

$\left\{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \wedge x=0\right.;\ \Leftrightarrow\ \left\{\frac{-y^2}{q}=2z \wedge x=0\right.;\Leftrightarrow \{y^2=-2qz \quad \wedge \quad x=0$

cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z negativas, cortado con el plano yz cuya ecuación es $x=0$ $\rightarrow$ parábola sobre el plano yz. (fig. 3)

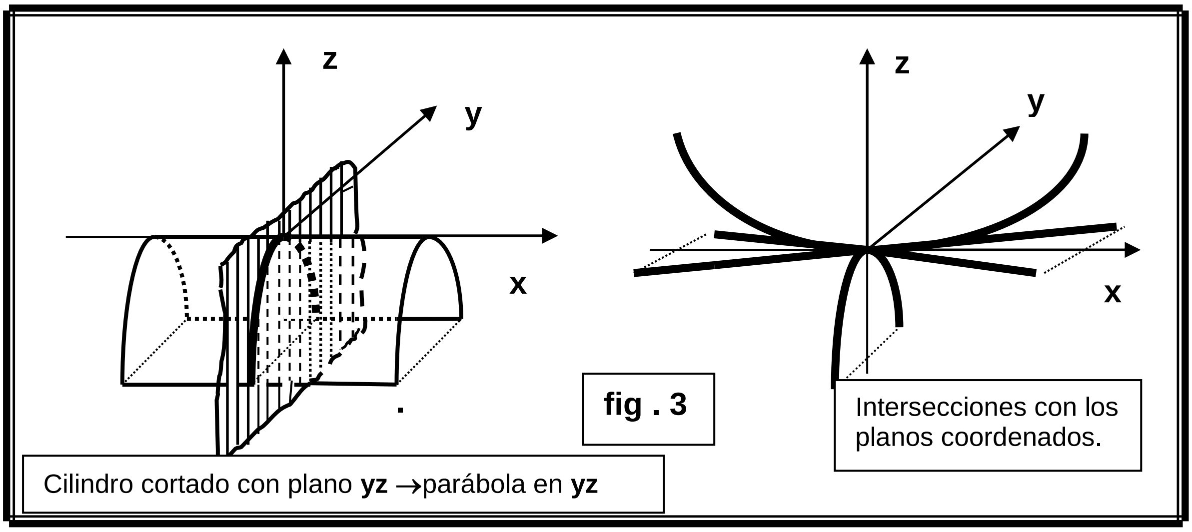


fig . 3

Cilindro cortado con plano **yz** $\rightarrow$parábola en **yz**

Intersecciones con los planos coordenados.

5. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados:

5.a) Intersección con planos paralelos al plano yz:

$$\left\{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \wedge x=k\right. \Leftrightarrow \left\{\frac{k^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \wedge x=k\right. \Leftrightarrow \left\{y^2=-2qz+\frac{k^2q}{p} \wedge x=k\right.$$

cilindro de directriz parabólica, que abre sus ramas hacia las z negativas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado yz. Para cada valor de k, con independencia de su signo, se obtiene como intersección una parábola de eje paralelo al eje z. (fig.4)

Intersección con planos paralelos al plano **yz**

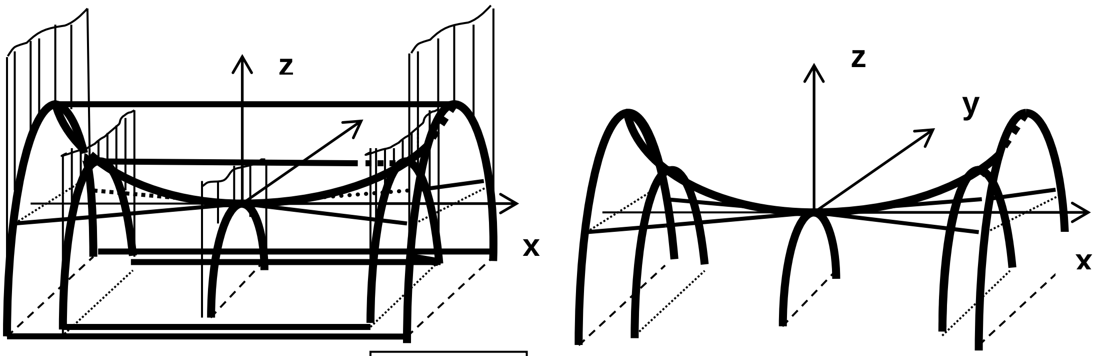


fig. 4

Intersecciones con los planos coordenados y con planos paralelos al plano **yz.**

5.b) Intersección con planos paralelos al plano xz:

.

$$\left\{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \wedge y=k\right. \Leftrightarrow \left\{\frac{x^2}{p}-\frac{k^2}{q}=2z \wedge y=k\right. \Leftrightarrow \left\{x^2=2pz+\frac{k^2p}{q} \wedge y=k\right.$$

cilindro de directriz parabólica y eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas, cortado por un plano paralelo al plano xz. La intersección es una parábola de eje paralelo al eje z. (fig.5)

Intersecciones con planos paralelos al plano coordenado **xz**

0

fig. 5

Plano paralelo al plano **xz**

5.c) <u>Intersección con planos paralelos al plano xy:</u>

Se presentan tres tipos de intersecciones distintas:

5.c.1) <u>el plano corta a la superficie por encima del plano xy</u>;
la ecuación del plano que corta es **z = k** ; con **k>0.**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \wedge z = k \ ; (k > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2k \wedge z = k \ ; (k > 0) \end{cases}$$

cilindro hiperbólico cortado con plano paralelo al plano **xy;**
la intersección es una hipérbola ubicada en un plano paralelo al plano xy (en este caso, para k>0, por encima del mismo) (fig.6).

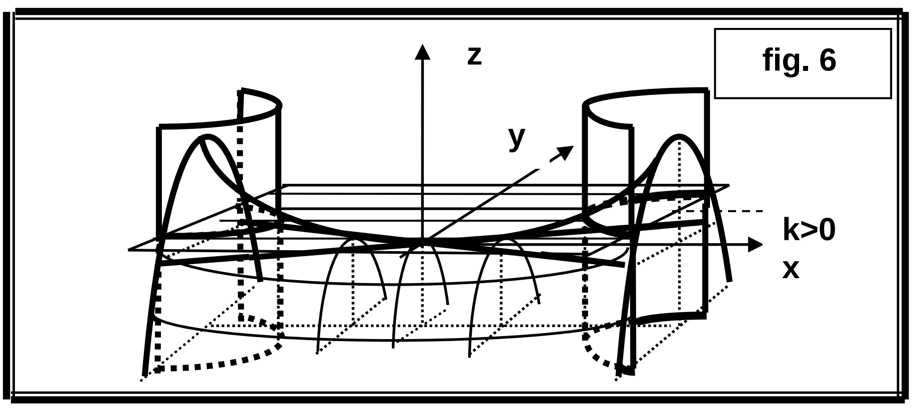
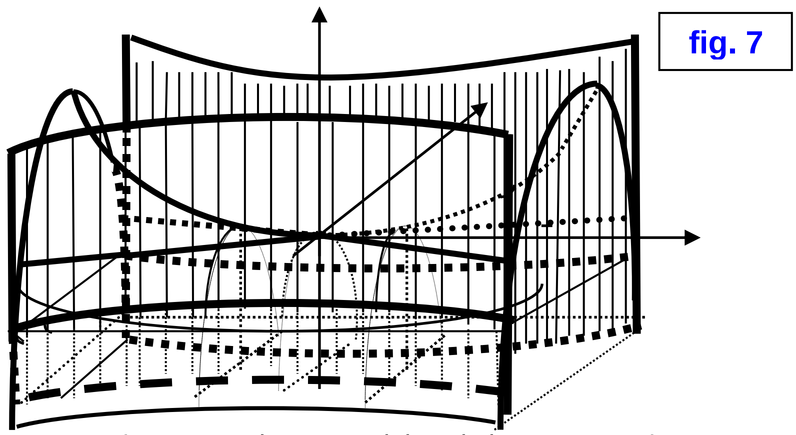


fig. 6

5.c.2) <u>La intersección para k=0 es la correspondiente al plano xy,</u> <u>ya estudiada</u>.

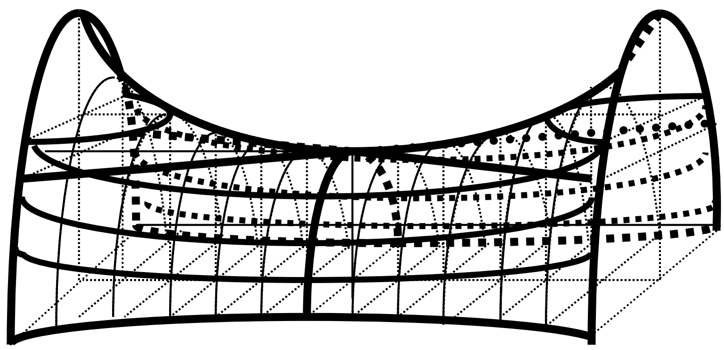
5.c.3) <u>El plano corta a la superficie por debajo del plano xy</u> ; plano de ecuación **z = k**;   **(k<0).**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = k \quad ; \quad k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2k \\ z = K \quad ; \quad k < 0 \end{cases}$$ cilindro de eje y cortado con plano z=k debajo del plano xy (fig.7)



Intersecciones con planos paralelos al plano xy para k<0

SUPERFICIE TERMINADA:



TRABAJO PRÁCTICO

Ejercicio 1. a) Estudiar y representar gráficamente la superficie cilíndrica cuya directriz es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ para z = 0

b) Idem para la superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola $y^2 = 4x$ para z = 0

c) Idem para la superficie cilíndrica cuya directriz es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ para z = 0

Ejercicio 2. Estudiar y representar gráficamente la superficie cónica cuya ecuación es:

a) $2x^2 + 3z^2 - y^2 = 0$

b) Idem para $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$

c) Idem para $y^2 + z^2 - 2x^2 = 0$

Ejercicio 3. a) Estudiar y representar la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$

b) Hallar la ecuación de la esfera cuyo centro es el punto O(2,-1,3) y radio r = 4.

c) Idem para O(-1, 2, 4) y radio $r = \sqrt{3}$

d) Idem de centro O(6, 3, -4) y tangente al eje de las abscisas "x".

Ejercicio 4. Estudiar y representar los siguientes elipsoides:

$a)\ 4x^2 + y^2 + 9z^2 = 144$

$b)\ 16y^2 + 4z^2 = 100 - x^2$

Ejercicio 5. Estudiar y representar gráficamente los siguientes hiperboloides:

$a)\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1$

$b)\ 36x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 144$

$c)\ 36y^2 - 9x^2 - 16z^2 = 144$

$d)\ 4z^2 - x^2 - 9y^2 = 36$