CONJUNTOS NUMÉRICOS.

Esquemáticamente los conjuntos numéricos pueden relacionarse a través del siguiente diagrama.

Naturales (N)
Cero } **N_0**
Negativos } **ENTEROS (Z)**
FRACCIONARIOS } **RACIONALES (Q)**
IRRACIONALES (I) } **REALES (R)**

Del conjunto de números reales, podemos decir que **"cubre"** la recta numérica; es decir para el conjunto **R** puede establecerse una correspondencia biunívoca con los puntos de la recta numérica; esta correspondencia se expresa:

"A cada punto de la recta le corresponde un único número real y recíprocamente".

CONCEPTO DE INTERVALO. OPERACIONES.

Los intervalos son subconjuntos de **R** que tienen, como se verá oportunamente gran importancia en el lenguaje del Análisis Matemático.

INTERVALOS FINITOS.

Definición: Dados dos números reales **a** y **b**, llamamos intervalo de extremos **a** y **b** al conjunto formado por todos aquellos números comprendidos entre **a** y **b**.

Según que los extremos pertenezcan o no al intervalo se distinguen:

a) Intervalo cerrado: Es aquel al cual pertenecen sus extremos.

$$\mathbf{I = \{ x/x \in R \wedge a \leq x \leq b \} = [a , b]}$$

Gráficamente es el segmento de trazo grueso de la figura, incluyendo los extremos.

b) Intervalo abierto: Idéntico al anterior, pero a él no pertenecen los extremos.

$$I = \{ x/x \in R \wedge a < x < b \} = (a, b)$$

c) Intervalos semiabiertos o semicerrados:
Contienen uno solo de sus extremos.

c_1) Abierto por izquierda y cerrado por derecha:

$$I = \{ x/x \in R \wedge a < x \leq b \} = (a, b]$$

c_2) Cerrado por izquierda y abierto por derecha:

$$I = \{ x/x \in R \wedge a \leq x < b \} = [a, b)$$

INTERVALOS INFINITOS.

Sea el siguiente conjunto:

$$I = \{ x/x \in R \wedge x \leq a \} = (-\infty, a]$$

a él pertenecen el número **a** y todos los números reales menores que **a** ; **-** ∞ se lee **"menos infinito"** y no simboliza un número real; sólo debe interpretarse como una indicación de que al intervalo pertenecen todos los números reales menores que **a**, incluso **a** .
Gráficamente:

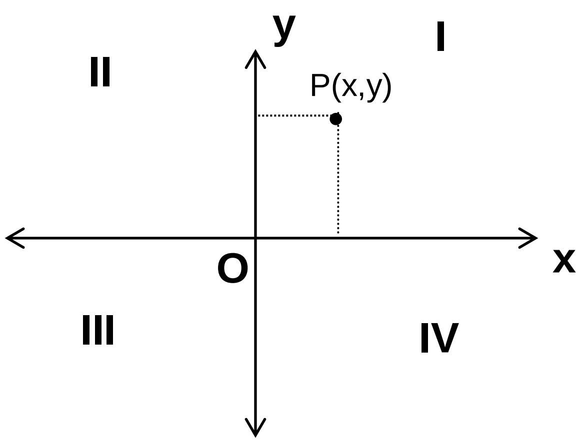
La notación de intervalo permite utilizar un nuevo símbolo para el conjunto de los números reales.

$$R = (-\infty, +\infty)$$

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO.

Coordenadas cartesianas ortogonales:

Del mismo modo que tenemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos de la recta numérica, extendiendo la idea al espacio de dos dimensiones (el plano) podemos establecer una correspondencia entre sus puntos y los pares ordenados de números reales (x,y). Para ello utilizamos el llamado Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonales (debido a Descartes, siglo XVII), constituido por un par de ejes orientados perpendiculares entre sí.



El plano queda dividido en cuatro cuadrantes cuyos límites son los ejes coordenados utilizándose para ambos ejes en general, la misma unidad de medida y para casos particulares distintas unidades.

El eje horizontal (eje x) se denomina eje de las abscisas y el eje vertical (eje y) eje de las ordenadas.

El punto O, intersección de los ejes, se llama Origen del Sistema. .

Actividades

Ejercicio Nº 1- Expresar en notación de intervalos:

a) $A=\{x/x\in R\wedge 1\leq x<2\}$
b) $B=\{x/x\in R\wedge 0<x\leq 5\}$

Ejercicio Nº 2.- Representar en la Recta Numérica:

a) $A=\{x/x\in R\wedge x^2-1=0\}$
b) $B=\{x/x\in R\wedge 2\leq x<5\}$

Ejercicio Nº 3.- Representar en el plano:

a) $A=\{(x,y)/1\leq x<3\wedge 2<y\leq 4\}$

b) $B=\{(x,y)/2<x\leq 3\wedge y^2-1=0\}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Las ecuaciones 3 x - y = 0 y 2 x - y = 1 de primer grado en dos variables pueden tener una o más raíces comunes y para encontrarlas, conformamos lo que se denomina un **SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS**, que se simboliza:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

El conjunto de pares (x , y) que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones se denomina **conjuntosolución del sistema**. Cuando el conjunto solución es vacío el **SISTEMA** es **INCOMPATIBLE**. Si existe única solución (un solo par ordenado) el sistema se dice **COMPATIBLE DETERMINADO** y si, el conjunto solución está conformado por más de un par ordenado, el sistema se denomina **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Generalizando, entonces, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede adoptar el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 & (1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

SOLUCION GRAFICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Como sabemos desde la escuela media, una ecuación lineal en dos variables representada en el espacio de dos dimensiones (el plano) tiene como lugar geométrico una recta.

Ejemplo 1:

Sea el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

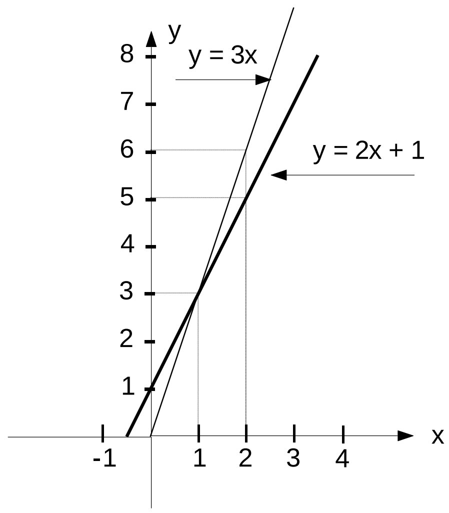
de (1) 3 x - y = 0 y = 3 x

de (2) 2 x - y = -1 y = 2 x + 1

cuya representación cartesiana es:

x	f(x)
1	3
2	6

x	f(x)
1	3
2	5



$S_1 = \{ (x,y) \,/\, 3x - y = 0 \}$

$S_2 = \{ (x,y) \,/\, 2x - y = -1 \}$ $\qquad S_1 \cap S_2 = \{(1,3)\}$

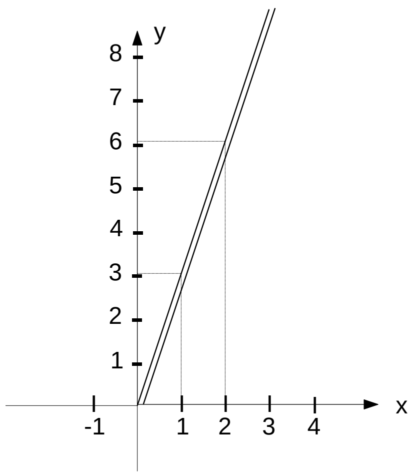
el conjunto solución del sistema $S_1 \cap S_2$ tiene un único par ordenado (las rectas se cortan en un punto) y por lo tanto el sistema resulta ser **COMPATIBLE DETERMINADO.**

Ejemplo 2:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 6x - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Si representamos gráficamente las rectas que corresponden a las ecuaciones (1) y (2).



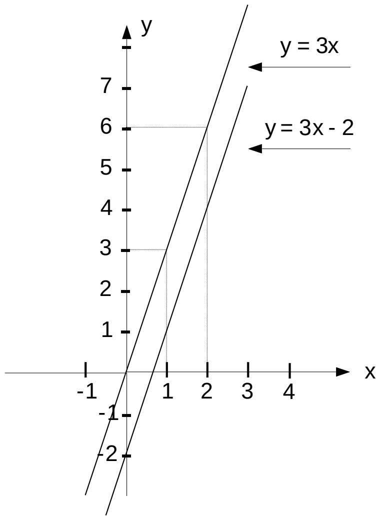
observamos que los lugares geométricos coinciden, razón por la cual el conjunto solución del sistema posee infinitos pares ordenados: los que corresponden a todos los puntos de cada una de las rectas.
El sistema se dice, **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Ejemplo 3:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 3x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Representadas gráficamente las dos ecuaciones:



resultan rectas paralelas: no existe intersección, lo cual significa que el conjunto solución del sistema es vacío; por esta razón el sistema se dice **INCOMPATIBLE**.

RESOLUCION ANALITICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Para la resolución analítica de un sistema de ecuaciones lineales pueden utilizarse distintos métodos, algunos de ellos desarrollados en la escuela media: sustitución, igualación, sumas y restas, determinantes, razón por la cual de cada uno de ellos daremos sólo un ejemplo.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

a_1) se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones del sistema (de la ecuación (1) despejamos **y**).

$$y = 3\,x$$

a_2) **SUSTITUIMOS** la expresión hallada en la otra ecuación (en nuestro caso en la ecuación (2)).

$$2x - 3x = -1$$
$$-x + 1 = 0$$

a_3) Resolvemos la ecuación de primer grado con una incógnita, obteniendo:

$$x = 1$$

a_4) Hallamos el valor numérico de la expresión obtenida en a_1) para el valor hallado en a_3).

$$y = 3 \, . \, 1 = 3$$

La solución es el par ordenado: $(x, y) = (1,3)$

MÉTODO DE IGUALACIÓN.

Para el mismo ejemplo procedemos de la siguiente manera:

b_1) Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones (despejamos **y**)

de (1) $y = 3x$ (3)
de (2) $y = 2x + 1$ (4)

b_2) Igualamos los segundos miembros de (3) y (4)

$$3x = 2x + 1$$

$$3x - 2x = 1$$

obteniendo: $\boxed{x = 1}$

b_3) Hallamos el valor numérico de **y** en (3) o en (4) indistintamente para el valor de **x** obtenido en b_2)

$$y = 3 \, . \, 1$$

$$\boxed{y = 3}$$

METODO DE REDUCCION POR SUMAS Y RESTAS.

Volvamos al sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

El método que describiremos consiste conceptualmente en transformar el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en un sistema equivalente (que tenga el mismo conjunto solución) en el cual una de las ecuaciones tenga dos incógnitas y la otra sólo una.

En nuestro caso si queremos eliminar la incógnita **y** restamos (2) de (1)

$$\begin{array}{rl} & 3x - y = 0 \\ - & \underline{2x - y = -1} \\ \text{restando m.a.m.} & x = 1 \quad (3) \end{array}$$

resulta un sistema equivalente *(con el mismo conjunto solución)* conformado por una cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2) y la ecuación (3).

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ x = 1 & (3) \end{cases}$$

La ecuación (3) es x = 1 y este valor se reemplaza en (1) para obtener:

y = 3

Si queremos ahora eliminar **x**, debemos multiplicar la ecuación (1) por el coeficiente de la incógnita **x** correspondiente a la ecuación (2); multiplicar la ecuación (2) por el coeficiente de la incógnita **x** correspondiente a la ecuación (1) y luego restar:

multiplicamos (1) por 2 : 2 . 3 x - 2 y = 0

multiplicamos (2) por 3 : 3 . 2 x - 3 y = 3 . (-1)

obteniendo: 6 x - 2 y = 0

6 x - 3 y = - 3

restando m.a.m. $\boxed{y = 3}$

y reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2) se llega a:

$\boxed{x = 1}$

Actividades

1.- Resolver:

a) $7x + 7 = 5x + 14$
b) $4x - 12 = 3x$
c) $8x + 5 = 26 - 6x$
d) $28 - 3x + 1 = 0$
e) $4(2 - x) - 8 = 0$
f) $100 - [16(x-1) - (10x - 2)] = 48$

2.- Plantear y resolver la ecuación

a) Qué número debe restarse de 8 para obtener el triplo de dicho número?

b) Hallar el número que verifica: si lo multiplicamos por tres, al producto le sumamos cinco y a la suma la dividimos por dos, obtenemos el mismo resultado que si lo multiplicamos por cinco, al producto le sumamos cuatro y a la suma la dividimos por tres.

c) La tercera parte de un número menos su duplo es igual a un quinto del mismo número menos 28. Cuál es el número?

d) Hallar un número tal que si le restamos su mitad, obtenemos el mismo resultado que si a la mitad de la unidad le restamos uno.

e) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que multiplicados entre sí dan como resultado 255

3.- Resolver los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**Realizar el gráfico en todos los casos**

$$a)\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 5 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -8x + 6y = -10 \end{cases} \quad e)\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \quad f)\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ -10x + 6y = -2 \end{cases}$$

SISTEMA SEXAGESIMAL DE MEDICION DE ANGULOS

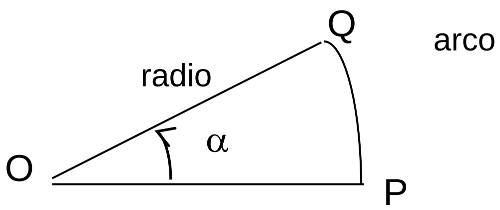
Si dividimos una circunferencia de radio cualquiera en 360 arcos iguales y unimos los puntos de división con el centro, obtendremos 360 ángulos iguales a cada uno de los cuales se asigna el valor de un grado sexagesimal (1°).

A su vez, cada ángulo de un grado se subdivide en 60 partes (ángulo de un minuto = 1') y por último cada ángulo de un minuto vuelve a subdividirse en 60 partes, obteniéndose un ángulo de un segundo (1").
Entonces:

- un ángulo de un giro vale 360°.
- un ángulo de medio giro, llamado ángulo llano vale 180°.
- un ángulo de un cuarto de giro, se denomina ángulo recto y vale 90°; la mitad de un ángulo recto vale 45°.
- un ángulo de 33 grados sexagesimales, 45 minutos y 30 segundos, se escribe: 33°45'30".

SISTEMA DE MEDIDA EN RADIANES

La medida de un ángulo queda definida en este sistema, como el cociente entre la longitud del arco PQ y la longitud del radio.
Si designamos con α al ángulo de vértice coincidente con el centro de la circunferencia:



$$medida\ de\ \alpha = \frac{longitud\ \ del\ arco\ PQ}{longitud\ \ del\ radio}$$

Cuando la longitud del arco PQ es igual al radio, decimos que el ángulo mide un radián. Un radián entonces, no indica dimensión ya que resulta del cociente de dos longitudes.

De la definición, surge la siguiente consecuencia, muy utilizada:

long. del arco = long. del radio x ángulo en radianes.

Entonces:

- un ángulo de un giro mide 2π radianes.
- un ángulo de medio giro mide π radianes.
- un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.
- La mitad de un ángulo recto mide $\pi/4$ radianes.

En el sistema de medida en radianes, el ángulo de un radián (longitud del arco igual a la medida del radio) equivale a un ángulo del sistema sexagesimal de 57° 17'44",80; en efecto:

π radianes ________________ 180°

1 radián ________________ $\frac{180°}{\pi} = 57°,2957795$ = 57° 17'44",8

Deduciremos por ser las más usuales, aquella expresiones que permiten efectuar la transformación entre los **sistemas sexagesimal** y el **sistema de medición en radianes.**

Teniendo en cuenta la medida del ángulo llano en los sistemas, puede establecerse la siguiente proporción:

$\frac{\alpha^r}{\pi} = \frac{\alpha^o}{180^\circ}$ de la cual $\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ$

Permite transformar la medida de un ángulo expresado en grados sexagesimales a radianes.

La expresión: $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\alpha^r$ posibilita transformar ángulos expresados en radianes al sistema sexagesimal.

Ejemplo 1:

Si $\alpha^\circ = 30^\circ$, expresarlo en radianes

$$\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ} \bullet 30^\circ = \frac{\pi}{60^\circ} = 0{,}5236$$

Ejemplo 2:

Si $\alpha^r = 0{,}7854$, expresarlo en el sistema sexagesimal

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \bullet 0{,}7854 = 45^\circ$$

Actividades

1.- Transformar a radianes los siguientes ángulos expresados en el sistema sexagesimal:

a) 53° 18'18",34
b) 146° 30'
c) 267° 38'73"

2.- Transformar al sistema sexagesimal, los siguientes ángulos expresados en radianes:

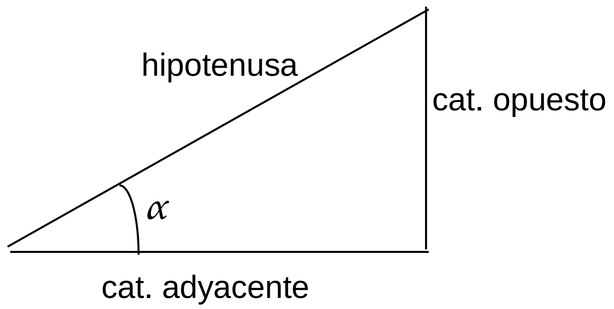
a) 3,27
b) 3,18
c) 5,19
d) 3,25

3.- a) Hallar la medida en el sistema sexagesimal del ángulo correspondiente a un arco de 150 cm de longitud en una circunferencia de radio r =m 25 m.

b) Las ruedas de un automóvil tienen un diámetro de 876 mm. ¿Cuántos centímetros avanza el automóvil si las ruedas giran un ángulo llano?

RELACIONES TRIGONOMETRICAS EN UN TRIANGULO RECTANGULO

Recordemos las definiciones de las relaciones trigonométricas seno, coseno, y tangente de un ángulo.



$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

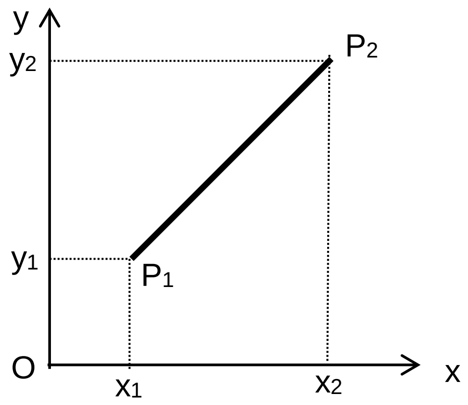
$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.

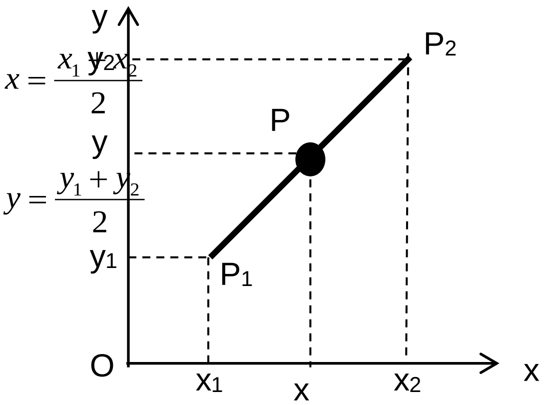
Sean P_1 (x_1 , y_1) y P_2 (x_2 , y_2)
la distancia d = $\overline{P_1P_2}$ resulta:

d = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento P_1P_2, se deben realizar el promedio entre las coordenadas de los extremos.



Actividades

1.- Hallar la distancia entre los puntos:

a) $P_1(-2,4)$ y $P_2(2,-4)$

b) $P_1(3,-1)$ y $P_2(2,5)$

2.- Demostrar que los puntos:

a) $A(-11,3)$; $B(-8,-2)$; $C(3,8)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

b) $A(7,5)$; $B(2,3)$; $C(6,-7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar el área.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

Existe una estrecha relación entre los conceptos geométricos y el mundo que nos rodea.

La **geometría** surge a partir de la observación de cosas simples y es por ello que el estudio de la geometría no debe aislarse del mundo ni de las otras áreas de la Matemática.

Es la naturaleza misma quien ha proporcionado al hombre las primeras lecciones de geometría ya que existen en ella innumerables ejemplos de formas geométricas.

A lo largo de la historia de la humanidad el hombre ha utilizado las formas geométricas que provee la naturaleza para la creación de objetos útiles para el desarrollo de sus actividades.

<u>PUNTO, RECTA, PLANO Y ESPACIO:</u>

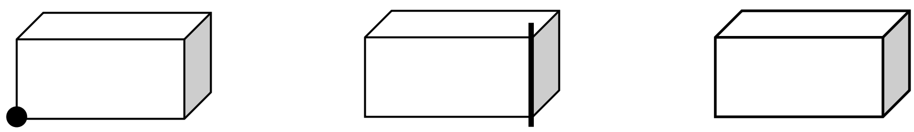
Punto: * la marca más pequeña que se puede dibujar.
* ubicación sin longitud, ancho o altura.
* es una idea o abstracción.

Recta: * la línea más fina que se puede dibujar.
* longitud ilimitada, derecha, sin grosor ni extremos.
* es una idea o abstracción.

Plano: * el corte más delgado posible.
* ilimitado, continuo en todas las direcciones pero sin grosor.
* es una idea o abstracción.

Espacio: ***** todos los puntos que están afuera, sobre y dentro de un ilimitado, sin longitud, ancho ni altura.
* El conjunto de todos los puntos.
* Es una idea o abstracción.

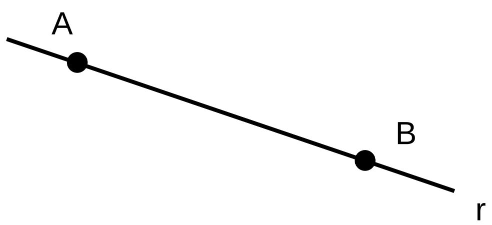
Las siguientes figuras dan la idea de punto, recta y plano.



RELACIONES ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS.

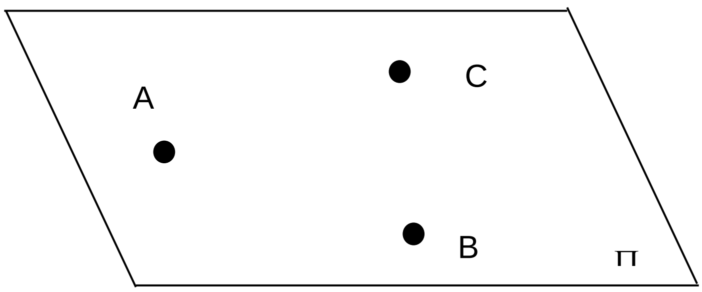
Para representar puntos sobre un papel, se dibujan marcas lo más pequeñas posibles.

Una recta se puede considerar como un conjunto de puntos. Al dar nombre a un par de ellos, se define una y sólo una recta.

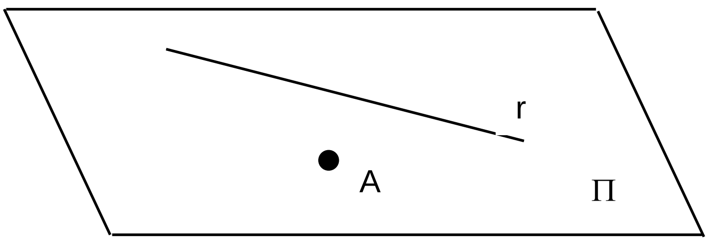


Recta AB o recta r

Un plano puede definirse si se conocen tres puntos no alineados.



Los puntos A, B y C definen el plano Π. También definen un plano, una recta y un punto que no le pertenece.

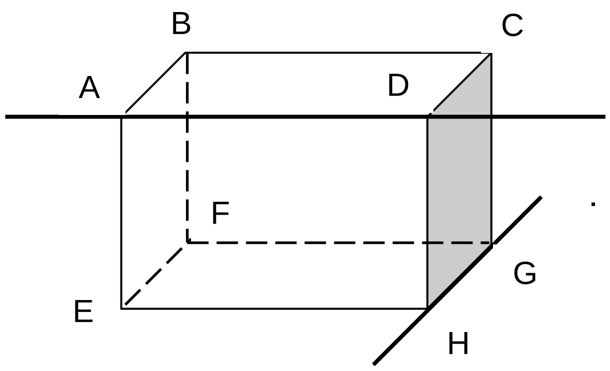


r y A definen
el plano Π

Algunas definiciones importantes:

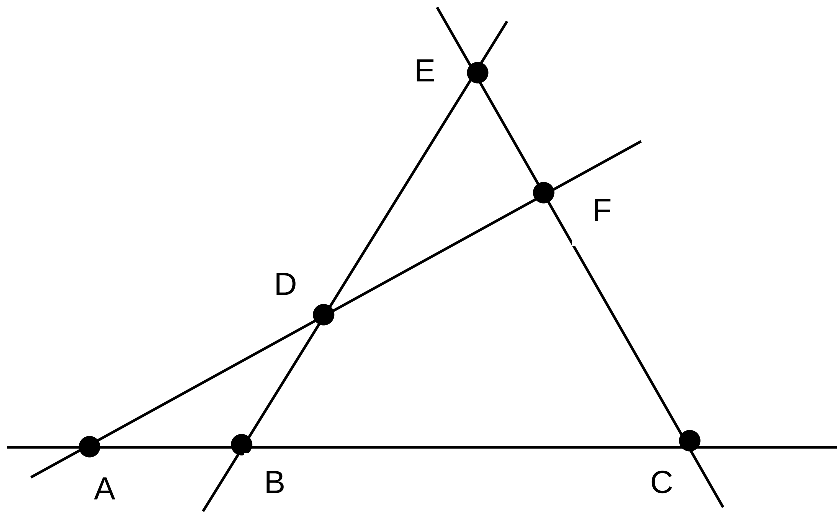
- **Puntos colineales**: son los que están sobre una misma recta.
- **Puntos coplanares**: son los que pertenecen a un mismo plano.
- **Rectas que se cortan o "intersecan"**: son aquellas que tienen un único punto común.
- **Rectas paralelas**: son las que no se intersecan, **estando sobre un mismo plano.**

- **Rectas concurrentes**: son tres o más rectas que se cortan en un punto.
- **Rectas alabeadas**: no son paralelas ni coincidentes, ni se intersecan (son rectas ubicadas en el espacio tridimensional).



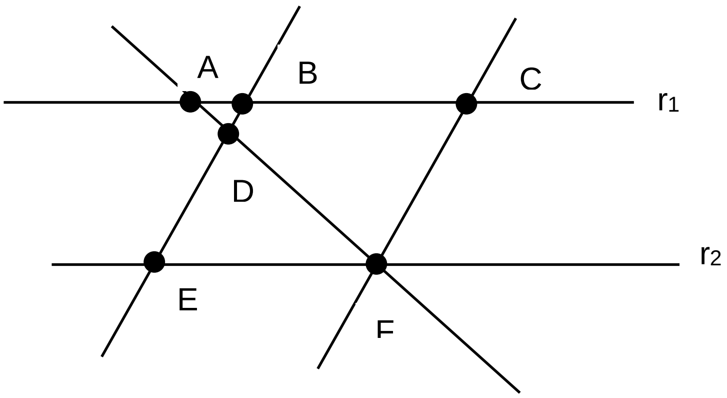
Ejercicio 1: En la siguiente figura:

a) Nombrar todos los conjuntos de tres puntos colineales.
b) Nombrar conjuntos de puntos no colineales.
c) Nombrar cuatro puntos entre los cuales no haya tres que sean colineales.



Ejercicio 2:

a) Encontrar tres pares de rectas intersecantes.
b) Encontrar tres rectas concurrentes.
c) Enumerar todos los pares de rectas paralelas.

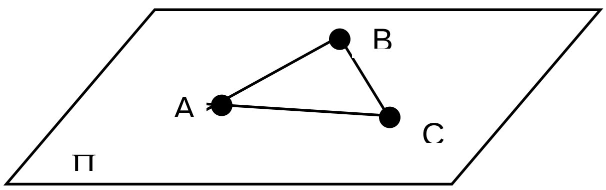


Algunas figuras geométricas básicas.

Teniendo en cuenta que las rectas, los planos y los espacios han sido definidos como conjuntos de puntos, se definirán del mismo modo las figuras geométricas.

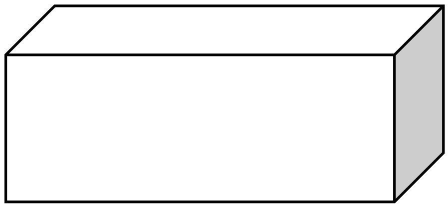
- una **figura plana** es aquella que tiene todos sus puntos en un plano, pero no sobre la misma recta.

Ejemplo: un triángulo.



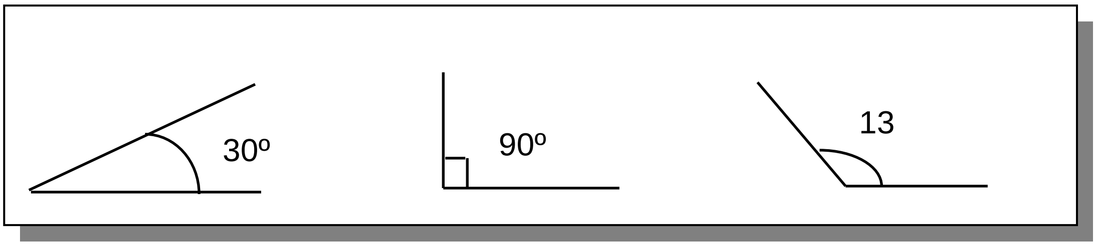
- una **figura espacial** no tiene todos sus puntos en un mismo plano.

Ejemplo: un paralelepípedo



Existen tres tipos de ángulos:

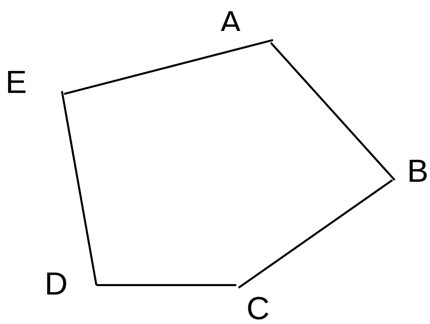
a) ***agudo.*** (menor de 90º)
b) ***recto*** (igual a 90º)
c) ***obtuso***. (mayor de 90º)



Nota: los ángulos mayores de 180° y menores de 360° se llaman cóncavos.

POLÍGONOS.

Un **polígono** es la unión de segmentos que se juntan en sus extremos de manera tal que:



a) dos segmentos se encuentran como máximo en un punto.

b)cada segmento toca exactamente a otros dos.

La palabra polígono viene del griego **polygonos**. De **polys** que significa muchos y de **gonia** que significa ángulos. Digamos que la “traducción” más precisa de la palabra polígono sería “figura que tiene muchos ángulos”.

Estos son los nombres de los polígonos de menos de veinte ángulos. (El número de ángulos coincide con el número de lados).

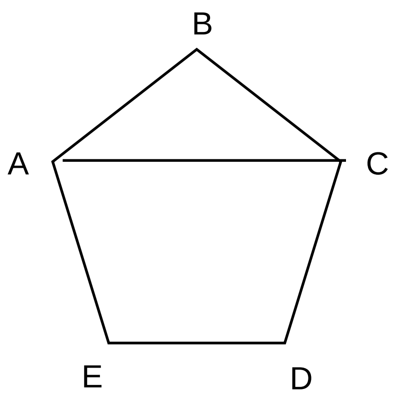
Número de lados	Nombre del polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono o Nonágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Triskaidecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono

Para saber cómo se llama un polígono de menos de cien lados podemos hacer lo siguiente. Primero contamos el número de lados que tiene, hacemos una combinación de prefijos, como se muestra a continuación y agregamos la terminación **gono.**

Decenas		y	Unidades		Terminación
			1	-hená-	
20	Icosa-		2	-dí-	
30	Triaconta-		3	-trí-	
40	Tetraconta-		4	-tetrá-	
50	Pentaconta-	-kai-	5	-pentá-	-gono
60	Hexaconta-		6	-hexá-	
70	Heptaconta-		7	-heptá-	
80	Octaconta-		8	-octá-	
90	Eneaconta-		9	-eneá-	

Por ejemplo, un polígono de 30lados se llama, triacontágono. Uno de 63 lados se llama, hexacontakaitrígono.

Elementos de un polígono

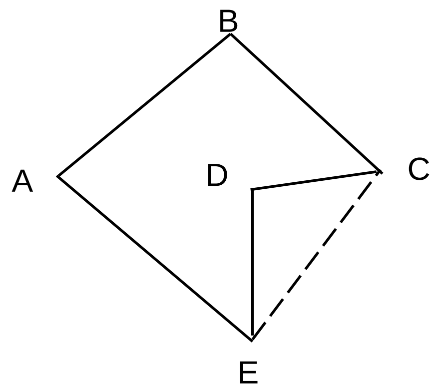


* A, B, C, D y E son los vértices.

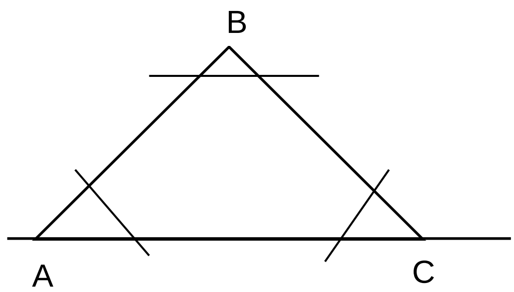
* $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ y $\overline{EA}$ son los lados.

* Si unimos dos vértices no consecutivos; por ej. $\overline{AC}$ es una diagonal

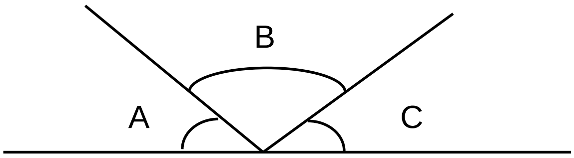
- Si todas las diagonales están en el interior del polígono, se lo llama polígono convexo.
- Si una diagonal es exterior al polígono, por ejemplo $\overline{CE}$, el polígono es cóncavo.



<u>Suma de los ángulos interiores de un triángulo.</u>



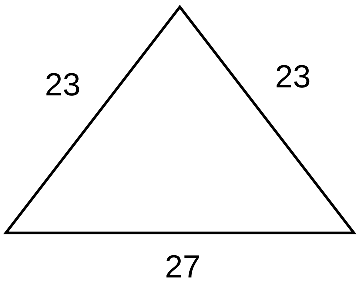
Si se cortan los ángulos y se disponen como en la figura siguiente, se observa que:



$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180º$

La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180º

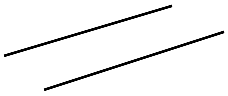
Se observa además que: la suma de dos lados es mayor que la longitud del tercero.



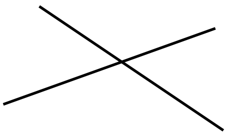
Rectas y planos.

En el **plano** (Espacio de dos dimensiones) dos rectas pueden:

- a) ser paralelas.

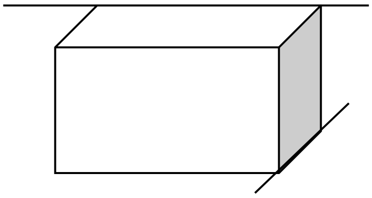


- b) intersecarse.

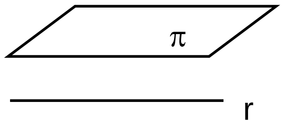


En el espacio tridimensional dos rectas pueden:

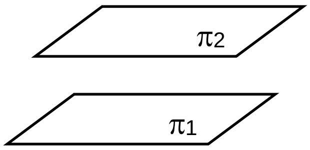
- ser paralelas. (definen un plano)
- intersecarse.
- ser alabeadas. (no se intersecan y no están en el mismo plano)



- una recta y un plano son paralelos si no tienen puntos en común.

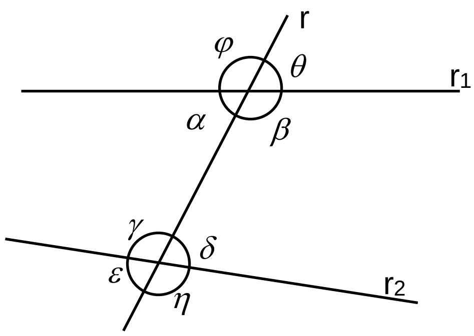


- los planos paralelos no tienen puntos en común.



- una transversal es una recta que interseca a dos rectas coplanares en dos puntos distintos.

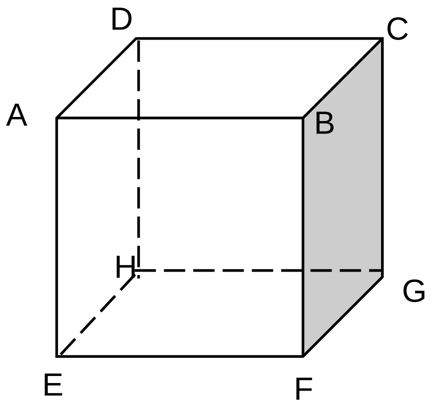
- la transversal r corta a r_1 y r_2 en dos puntos, formando los ángulos interiores $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



- y los ángulos externos $\eta, \varepsilon, \theta, \varphi$.
- Los ángulos α, δ y β, γ se denominan alternos internos.
- Los ángulos ε, θ y φ, η son alternos externos.
- Los ángulos $\alpha, \varepsilon;\ \beta, \eta;\ \varphi, \gamma\ \ y\ \ \theta, \delta$ son correspondientes (siempre del mismo lado de la transversal, uno interno y otro externo)

Ejercicios:

1) En el cubo de la figura:
   a) Dar cuatro rectas que sean alabeadas con AB.
   b) Dar seis rectas paralelas al plano ABCD.
   c) Dar tres pares de planos paralelos.

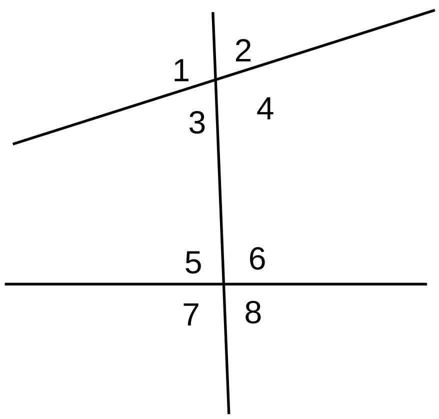


2) En el esquema de la figura:

   a) Dar dos pares de ángulos alternos internos.

   b) Dar dos pares de ángulos alternos externos.

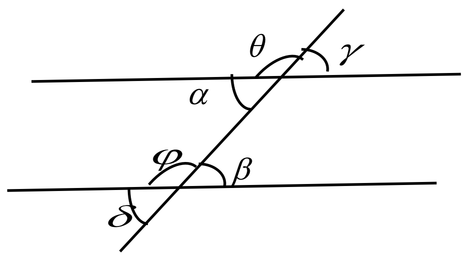
   c) Dar dos pares de ángulos correspondientes.



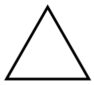
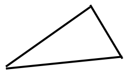
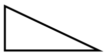
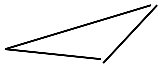
3) ¿Cuántos puntos de intersección pueden formarse con tres rectas?

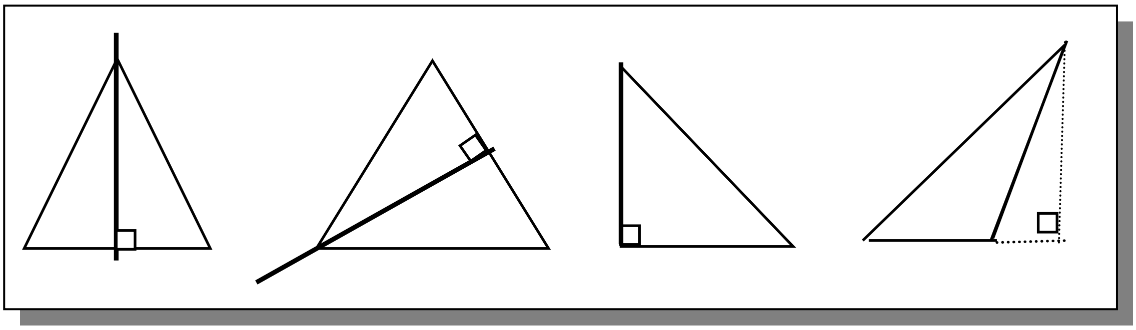
Rectas paralelas cortadas por una transversal.

- Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales. $\alpha = \beta$
- Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos externos son iguales. $\gamma = \delta$
- Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes son iguales. $\theta = \varphi$
- Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos interiores del mismo lado son suplementarios.
  (sumados dan 180º) $\alpha + \varphi = 180^{\circ}$



Triángulos : clasificación.

- triángulo **equilátero**: tiene los tres lados congruentes. 
- triángulo **isósceles**: tiene "al menos "dos lados congruentes. 
- triángulo **escaleno:** no tiene lados congruentes. 
- triángulo **acutángulo**: tiene los tres ángulos agudos. 
- triángulo **rectángulo**: tiene un ángulo recto. 
- triángulo **obtusángulo**: tiene un ángulo obtuso. 
- La **altura de un triángulo** es el segmento que va desde el vértice hasta la recta sostén del lado opuesto y es perpendicular a ese lado opuesto.
-

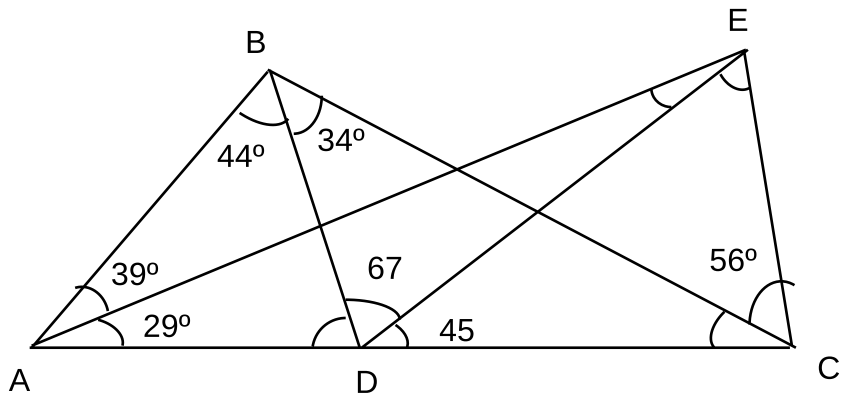


Ejercicios:

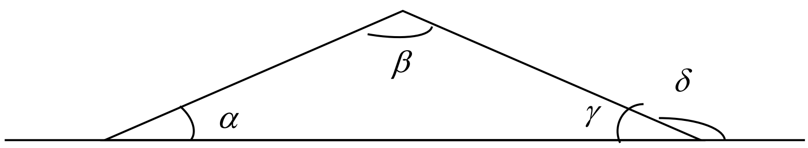
1) Dibujar en cada casilla un triángulo que responda a:

	EQUILÁTERO	**ISÓSCELES**	**ESCALENO**
ACUTÁNGULO			
RECTÁNGULO			
OBTUSÁNGULO			

2) a) Completar los ángulos faltantes.
 b) Identificar los triángulos:ABC; ADE; BDC; ABD; ACE; DCE
 Como acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

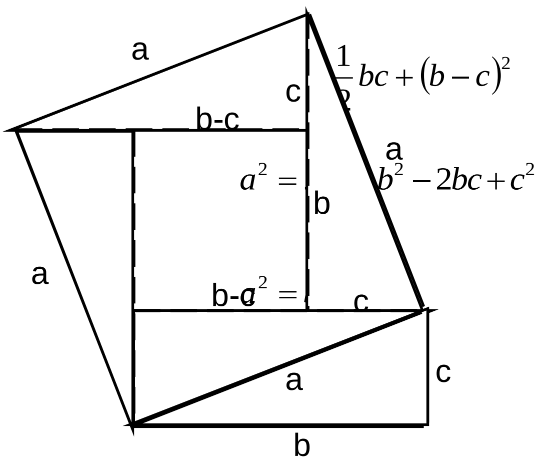


Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, puede demostrarse fácilmente que la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no contiguos.



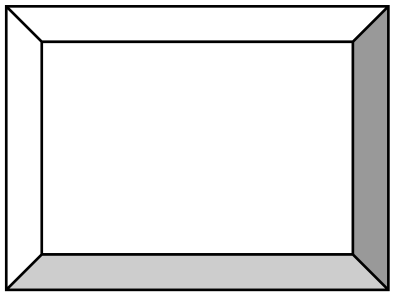
$$\delta = \alpha + \beta$$

<u>TEOREMA DE PITÁGORAS</u>: Si ABC es un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

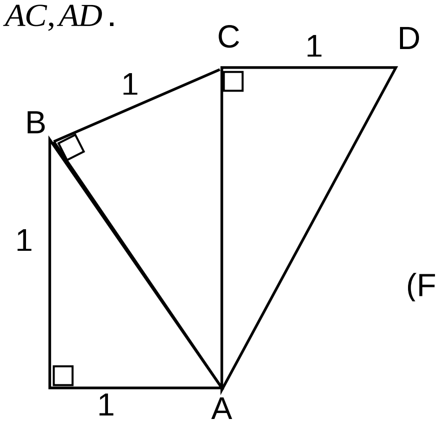


Problemas:

1) Un anuncio de venta de un televisor dice que la pantalla es de 29 pulgadas; si la altura es de 0,8 del ancho de pantalla y el aviso refiere a la diagonal de la misma. Cuál es (expresado en centímetros) la medida del ancho y de la altura. (1" = 2,54 cm)

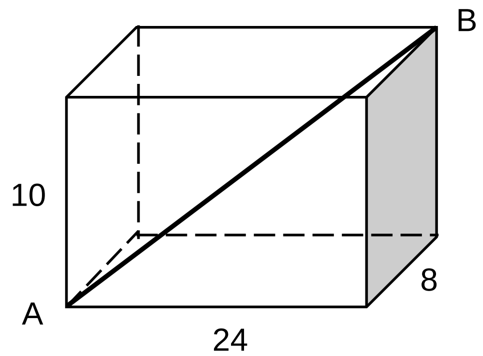


2)Hallar las longitudes $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.



(Fuera de escala)

3) Una caja tiene 24 cm. de largo,
8. cm. de ancho y 10 cm. de alto.
¿Cuál es la longitud de la diagonal AB ?



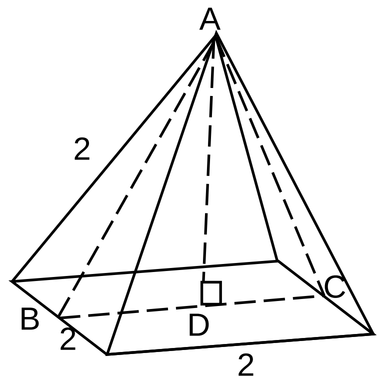
4) El hueco de una ventana mide 100 cm. de ancho y 70 cm. de altura. ¿Puede introducirse por la ventana una mesa de ping pong de 125 cm. de ancho?

5) Si la longitud del lado de un hexágono regular es de 1 cm. ¿Cuál es la longitud del segmento que une a los puntos medios de dos lados opuestos?

6) Si un triángulo equilátero tiene lados de longitud 1 m., calcular el radio de la circunferencia que contiene los tres vértices.

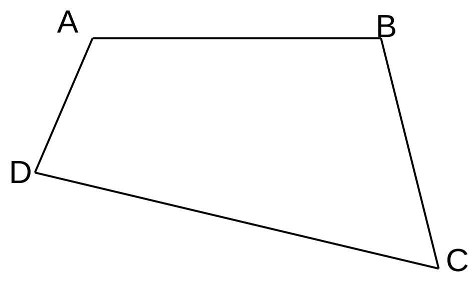
7)

8) Si una pirámide cuadrada tiene todas sus aristas de longitud =2
a) encontrar las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$
b)encontrar la longitud de la altura de la pirámide.
c)¿es ABC equilátero?



CUADRILÁTEROS:

- Un cuadrilátero es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, tres de los cuales no deben ser colineales. Los segmentos sólo deben intersecarse en sus extremos.



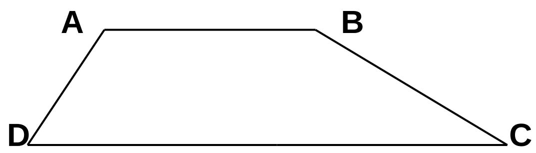
- Los lados AB y CD que no tienen vértices comunes, se denominan lados opuestos.

- Los lados AB y BD que tienen un vértice común, se denominan por tal razón, lados adyacentes.

- Los ángulos A y D son opuestos.

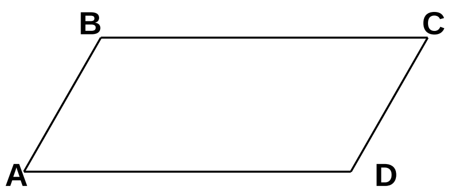
Descripción de los tipos básicos de cuadriláteros.

- **Trapecio:**es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.



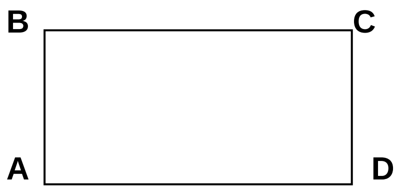
AB // **DC**
DC = base mayor
AB = base menor

- **Paralelogramo:** es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.
-

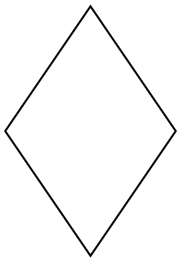


AB // **DC**
AD // **BC**

- **Rectángulo:** es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos. (*Si además, los lados son de igual longitud, se trata de un cuadrado)*.



- **Rombo:** es un paralelogramo con sus cuatro lados congruentes (de igual longitud).



De acuerdo con las definiciones antedichas, puede construirse el siguiente cuadro:

trapecio

Cuadrilátero
rombo

paralelogramo

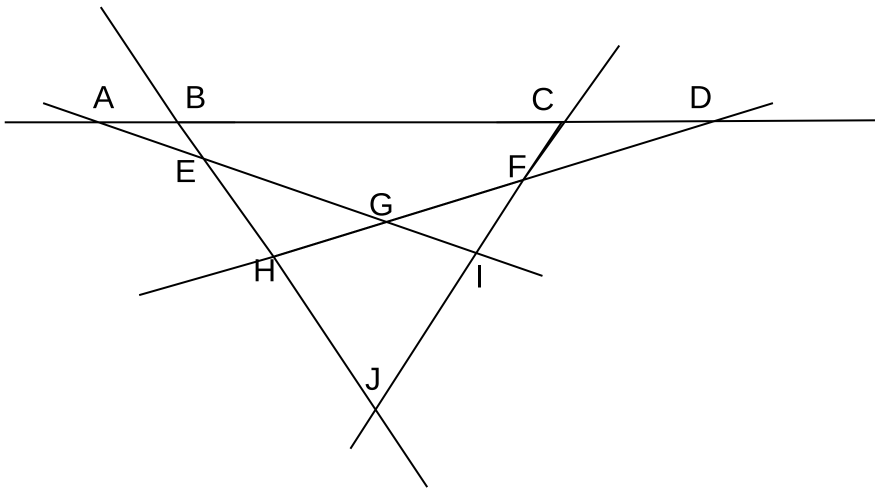
rectángulo

cuadrado

Ejercicio 1: Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

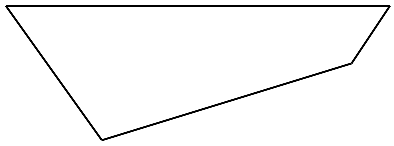
1. Un cuadrado es un rectángulo.
2. Un rectángulo es un paralelogramo.
3. Un paralelogramo es un rombo.
4. Un trapecio es un paralelogramo.
5. Algunos paralelogramos son rectángulos.
6. Un rombo es un cuadrado.
7. Algunos rombos son rectángulos.
8. Un paralelogramo es un trapecio.
9. Un trapecio puede tener sólo dos ángulos rectos.
10. Un rombo puede tener los cuatro ángulos rectos.

Ejercicio 2: En el esquema de la figura HGIJ es un cuadrilátero;

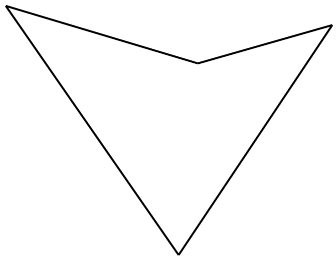


Identificar los vértices correspondientes a los siguientes polígonos que corresponden al dibujo anterior:

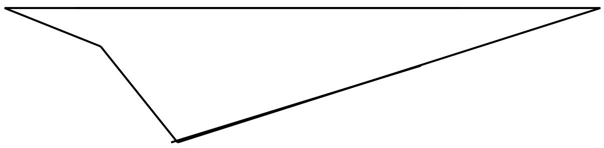
a)



b)



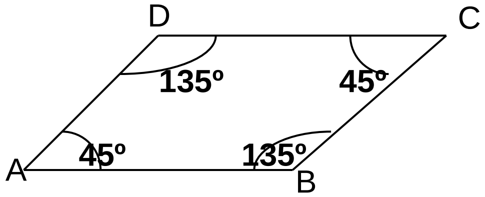
c)



d) Dibujar e identificar otros tres cuadriláteros.

Algunas propiedades de los paralelogramos:

- Los ángulos opuestos son congruentes.
- Los lados opuestos son congruentes.
- Las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.



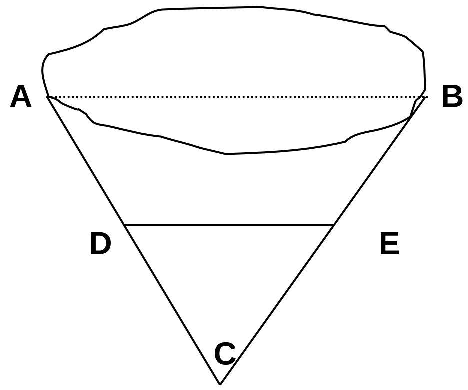
Ejercicios:

1) El paralelogramo de la figura anterior tiene como lados AB = x+5 y CD = 2x-7
Hallar la longitud del lado AB.

2) Sea un paralelogramo ABCD en la cual **AB** = 2x ; **CD** = 3y+4 ; **BC** = x+7 y **AD** = 2y. Calcular las longitudes de los lados del paralelogramo.

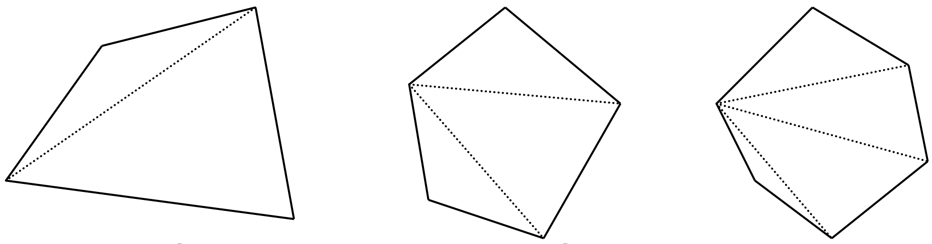
3) (**<u>Segmento medio</u>**: el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud).

4)



Se necesita conocer la distancia AB entre puntos opuestos de una laguna. Para ello se toma un punto C y se localizan los puntos medios de AC y BC. Se mide CD y, entonces: AB = 2 CD.

Descomposición de un polígono en triángulos



cuadrilátero **pentágono** **hexágono**

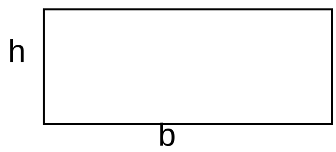
Para todos los casos, la suma de los ángulos interiores es igual a la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos que componen el polígono. Puede construirse la siguiente tabla:

Polígono	***Número de* Lados**	***Número de* Triángulos**	***Suma de las* Medidas de los ángulos**
Cuadrilátero	4	2	2•180º= 360º
Pentágono	5	3	3•180º= 540º
Hexágono	6	4	4•180º= 720º
------------			
n-gono	N	n-2	(n-2)•180º

- La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a dos rectos por (n-2) : 180º (n-2)
- La medida de un ángulo de un polígono regular de n lados es $\frac{180º\,(n-2)}{n}$.

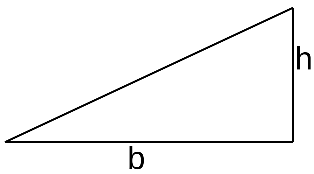
REAS Y PERÍMETROS

- Área de un rectángulo:



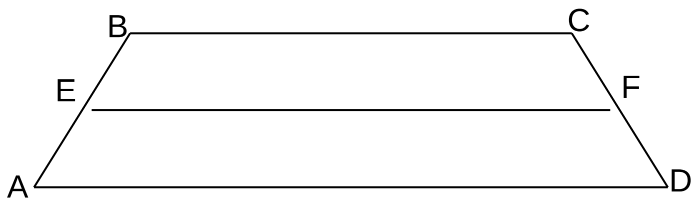
A = b • h

- Área del triángulo:



A = ½(b • h)

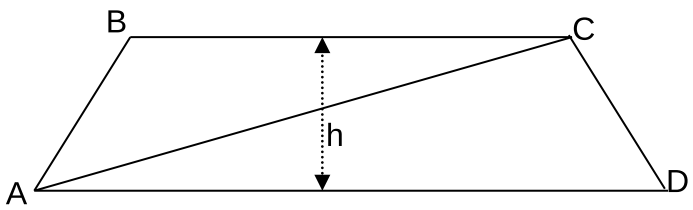
Trapecios:
El segmento que une los puntos medios de los dos lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las dos bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las mismas.



E = punto medio de AB.
F = punto medio de CD.

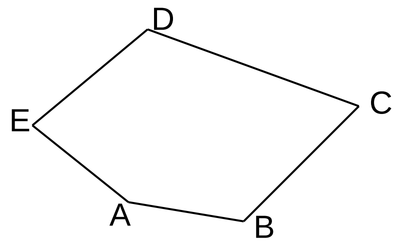
EF = ½ (BC + AD)

Superficie del Trapecio:



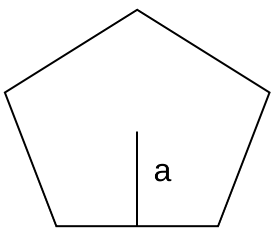
Área ABCD = Área ABC + Área ACD
= ½ h (BC + AD)

Perímetro de un polígono: Es la suma de las longitudes de sus lados.

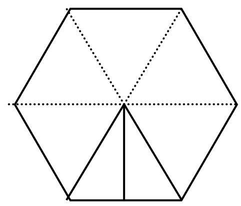


P = AB + BC + CD + DE + EA

Apotema: Es la distancia entre el centro de un polígono regular y un lado.



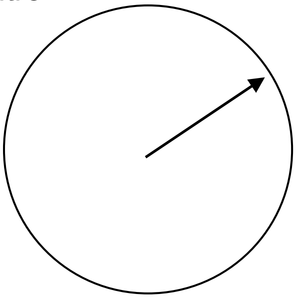
Área de un polígono regular: Se puede obtener por sumas de las áreas de los triángulos



En general: Área de un polígono: $\frac{\text{perímetro x apotema}}{2}$

	Área Del Triángulo	**Perímetro**	**Área del Polígono**
Pentágono	**½a•l**	**p= 5l**	$5\cdot\frac{1}{2}al=\frac{1}{2}a\cdot 5l=\frac{1}{2}ap$
Hexágono	**½ a•l**	**p = 6l**	$6\frac{1}{2}al=\frac{1}{2}a\cdot 6l=\frac{1}{2}ap$
Decágono	**½ a•l**	**p =10l**	$10\cdot\frac{1}{2}al=\frac{1}{2}a\cdot 10l=\frac{1}{2}ap$
n-gono	**½ a•l**	**p = nl**	$n\cdot\frac{1}{2}al=\frac{1}{2}a\cdot nl=\frac{1}{2}ap$

El círculo: Conjunto de los puntos del plano que están a una distancia menor o igual que r (radio) a un punto fijo llamado centro.



La frontera del círculo recibe el nombre de circunferencia.

Área del círculo: $\pi \bullet r^2$

Longitud de la circunferencia: $2\pi r$

Actividades

Problema 1: Se desea saber cuantas veces mayor es la cantidad de agua que puede conducir una cañería de 6 pulgadas de diámetro, respecto de una de cuatro pulgadas. *(una pulgada = 1" = 2,54 cm).*

Para 6" = 15,24 cm $\quad A_6 = \dfrac{\pi \cdot 15{,}24^2 cm^2}{4} = 182{,}4\ cm^2$

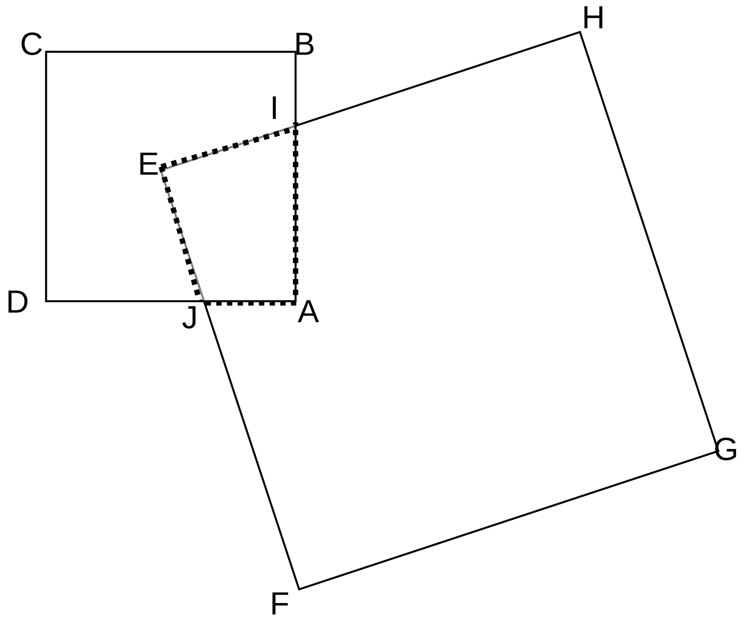
Para 4" = 10,16 cm $\quad A_4 = \dfrac{\pi \cdot 10{,}16^2 cm^2}{4} = 81{,}1\,cm$

$$\frac{A_6}{A_4} = \frac{182{,}4cm^2}{81{,}1cm^2} = 2{,}25$$

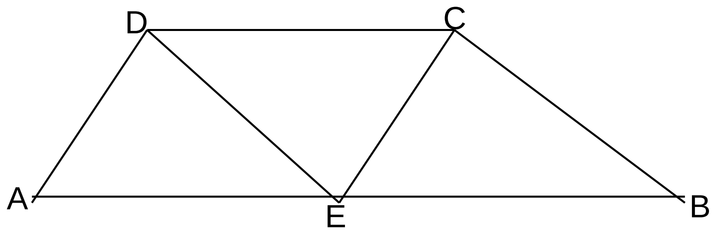
La cañería de 6" de diámetro tiene una sección 2,25 veces que la de 4", razón por la cual puede deducirse que permitirá conducir una cantidad de agua 2,25 veces mayor.

Problema 2: La longitud de cada lado de un hexágono regular es 4 unidades. Encontrar el valor de la apotema y el área del hexágono

Problema 3: Encontrar el área del cuadrilátero EIJA si E es el centro del cuadrado ABCD y HGFE es un cuadrado de lado 4 m, siendo BI = 1m ; IA = 2m



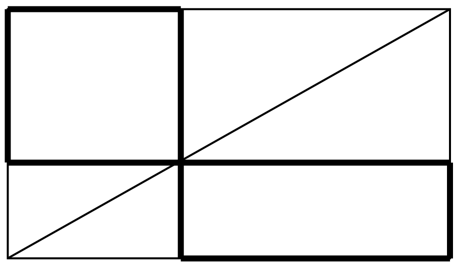
Problema 4: Si ABCD es un trapecio y E es el punto medio de AB, demostrar que las áreas de AECD y EBCD son iguales.



Problema 5: Probar que las Áreas A_1 y A_2 son iguales. (Observación: las áreas de los triángulos que genera la diagonal del rectángulo mayor son iguales).

A_1

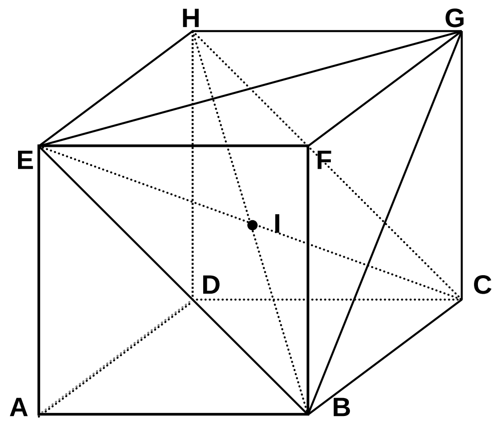
A_2



Problema 6: La longitud de las aristas del cubo de la figura es 1. Hallar:

a) Longitud BE.
b) Longitud BH.
c) Área del triángulo BEG.
d) Área del rectángulo BCHE.

.

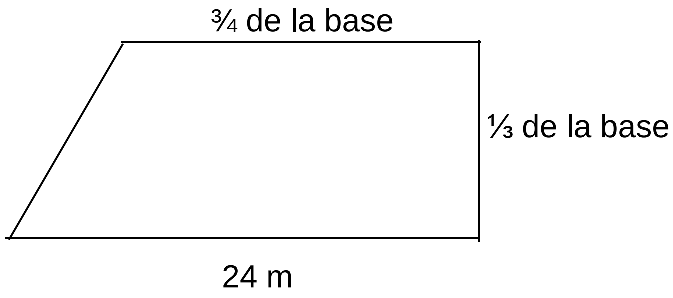


Problema 7: Un toldo de forma de cuadrada tiene 36 m de diagonal. ¿Cuál es su superficie?

Problema 8: Se han plantado en los largos de un terreno rectangular árboles cada 5 m. Si el ancho del mismo es de 42 m y la superficie es de 2100 m^2. ¿Cuántos árboles se plantaron?

Problema 9: Una sala cuadrada mide 20 m de perímetro. ¿Cuántas baldosas de 0,20 m de lado se necesitarán para embaldosar el piso?

Problema 9: Un terreno como el que se muestra en la figura debe cubrirse con césped sintético y rodear con alambre. ¿Qué cantidad de material debe utilizarse?



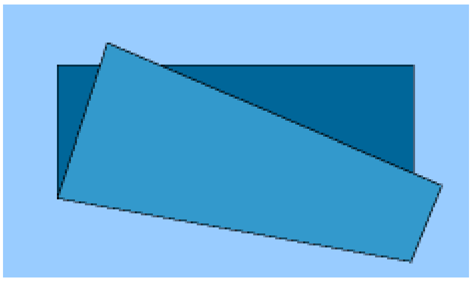
Problema 10: Un grupo de amigos organiza una fiesta. Para servir las bebidas cuentan con jarras cuyas medidas interiores son 12 cm de diámetro y 25 cm de altura. Si la jarra tiene una marca hasta la cual debe llenarse, que corresponde a los $\frac{4}{5}$ de su contenido. ¿Cuántas jarras se necesitan para llenar hasta el borde 100 vasos de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura?

CONSTRUCCION DE POLIGONOS CON PAPEL

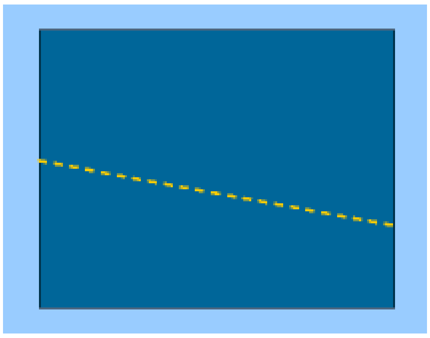
Ahora vamos a hacer algunos polígonos doblando papel. Para empezar se necesita una hoja de papel de cualquier tamaño; considerar que cuanto más pequeña sea, más difícil será hacer los dobleces.

RECTÁNGULO

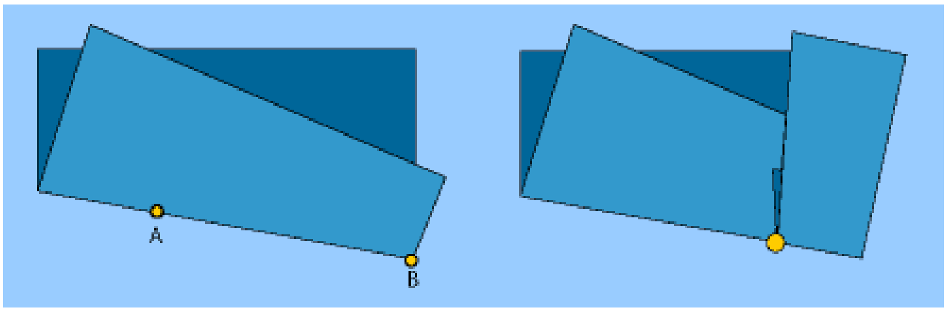
Recordar que los polígonos son figuras formadas por líneas. Para hacer nuestros polígonos, vamos a trazar líneas en la hoja. Para una línea recta, sólo hay que hacer un doblez así:



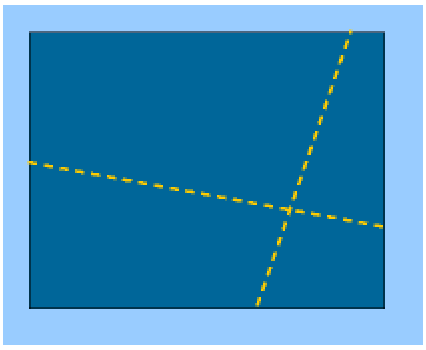
Cuando se desdobla la hoja quedará trazad una línea que se verá más o menos así:



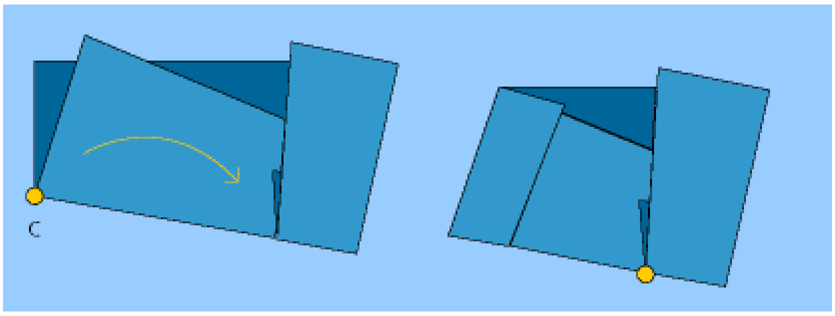
A partir de esta línea vamos a obtener un rectángulo. Se vuelve a doblar la hoja, pero ahora sobre la línea que se obtuvo hace un rato. Para lograrlo, la esquina B debe quedar sobre la línea que se había obtenido.



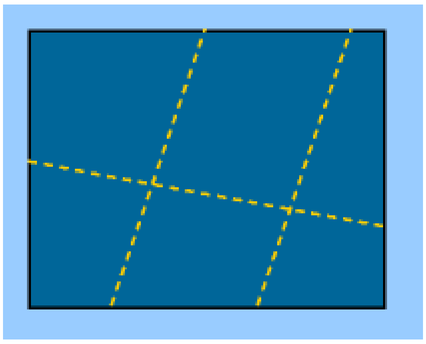
Al desdoblar la hoja quedan marcadas dos líneas. Estas líneas son perpendiculares, es decir, entre ellas hay un ángulo de 90°.



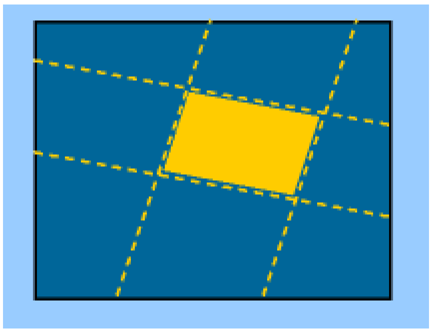
Cuando se hace lo mismo, pero con el otro extremo, se obtiene otra línea que también es perpendicular a la original.



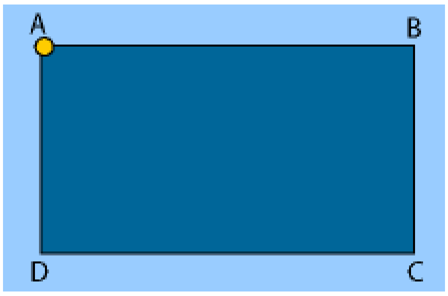
Después de este tercer doblez, la hoja queda así:



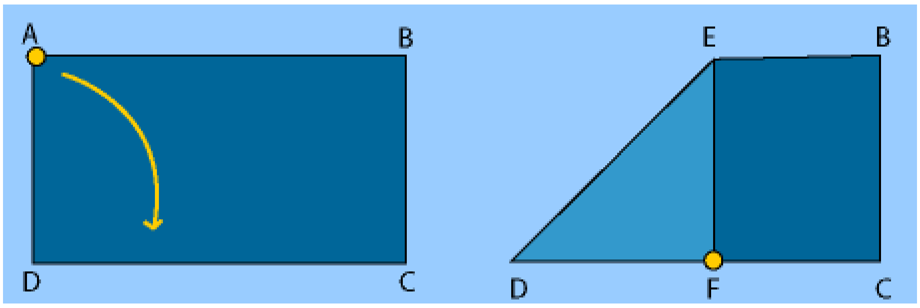
¿Cómo son estas últimas líneas obtenidas? Si ambas son perpendiculares a la misma línea, entre ellas son...
Para terminar de trazar el rectángulo, hay que doblar hacia abajo procurando que los puntos D y E queden sobre sus respectivas líneas.
Al desdoblar la hoja se verá el rectángulo terminado.



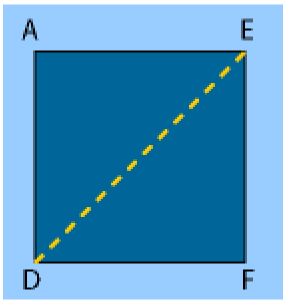
CUADRADO
Ahora vamos a construir un cuadrado a partir de un rectángulo.



Primero doblar la esquina superior izquierda hacia abajo de manera que la línea AD coincida con la línea AC.

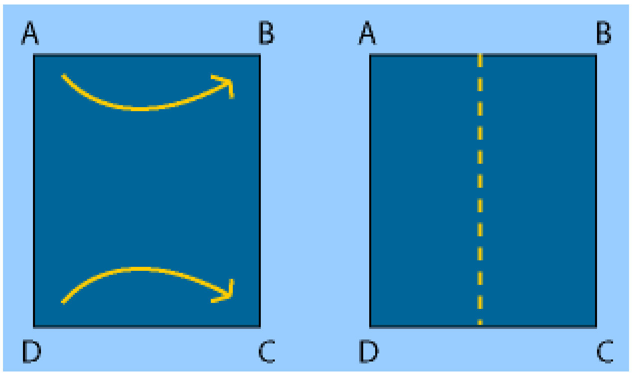


Para obtener el cuadrado, recortar la línea EF y listo. El cuadrado quedará con una de sus diagonales trazada:

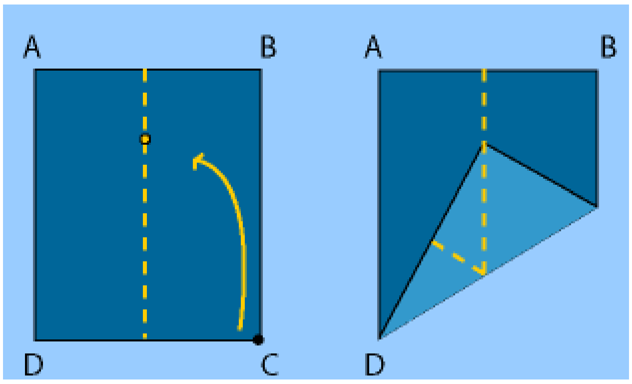


TRIÁNGULO EQUILÁTERO

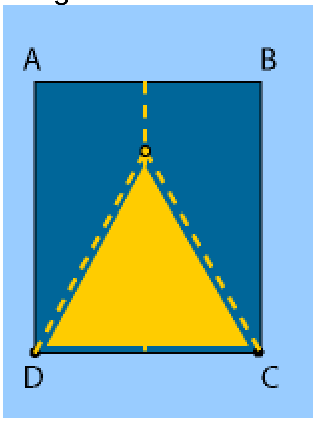
A partir de un rectángulo también se puede trazar un triángulo equilátero. La base del triángulo será la línea DC. Para comenzar, primero doblar el rectángulo por la mitad, haciendo que los puntos A y D coincidan con los puntos B y C, respectivamente.



Ahora doblar la esquina inferior derecha hacia arriba de manera que el extremo C quede sobre el doblez que acabamos de hacer.

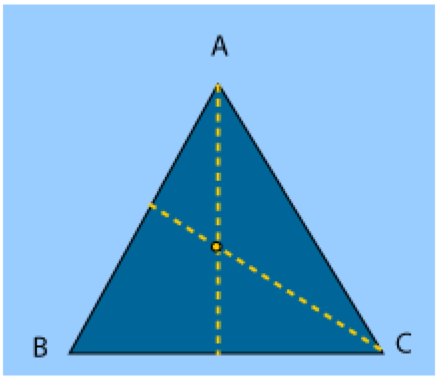


El punto donde se unen el vértice C y la línea central es justamente el tercer vértice que necesitamos. Para completar el triángulo marcar los lados OD y OC y recortar.

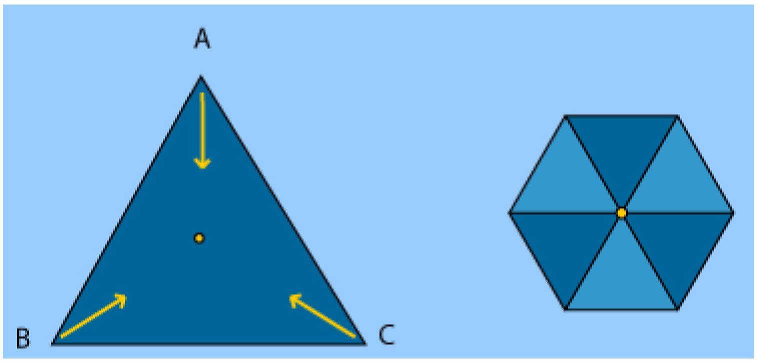


HEXÁGONO REGULAR

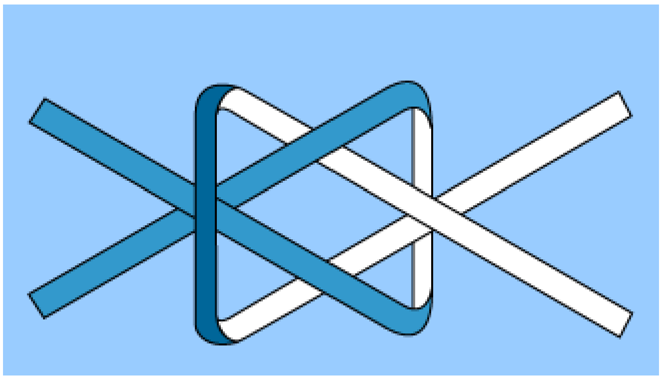
Se puede hacer un hexágono regular de dos maneras. La primera es a partir de un triángulo equilátero. Comenzar por dividir a la mitad el triángulo desde dos vértices distintos. Puede hacerse sobreponiendo la línea AB y la AC , y luego la BC sobre la AC.



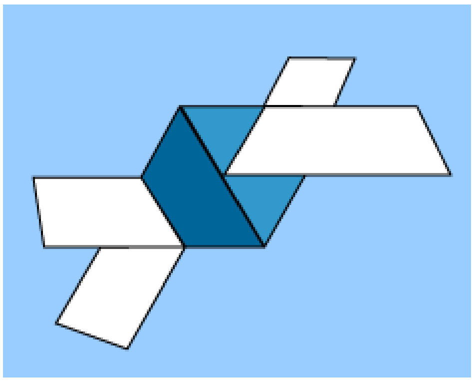
Ese punto en donde se intersectan los dobleces es el centro del triángulo. Para terminar, doblar los vértices hacia adentro y hacerlos coincidir en el centro del triángulo. el hexágono está listo.



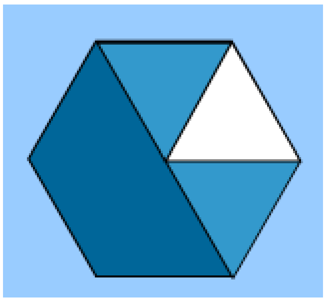
Otra manera de hacer un hexágono regular es entrelazando dos tiras de papel del mismo ancho. Se hace de esta manera:



No doblar las tiras, simplemente formar los lazos; así no costará trabajo tirar de los extremos para formar un hexágono al centro del nudo que se verá así:

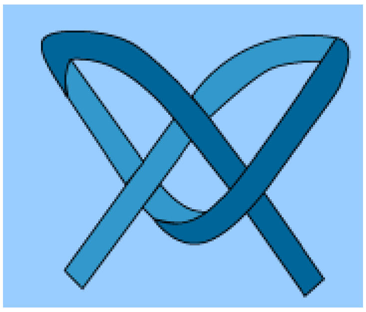


Ya sólo hay que esconder lo que sobra de las tiras doblándolas hacia atrás. El hexágono regular está listo.

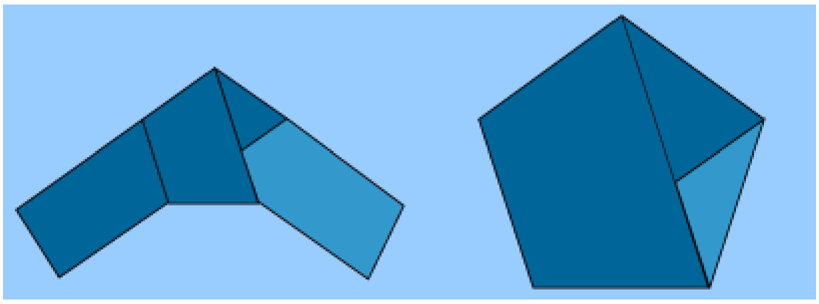


PENTÁGONO REGULAR

Para hacer un pentágono regular, hacer un nudo con la tira de papel de esta manera:



Una vez recorrido todo el papel, el nudo tiene básicamente la forma de un pentágono. Escondiendo lo que sobra de las tiras está listo.

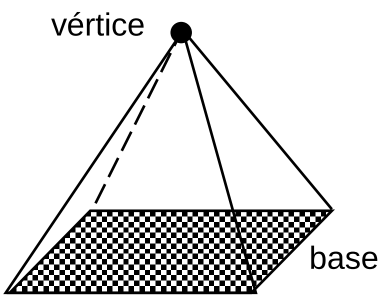


POLIEDROS.

Un **poliedro** es un objeto tridimensional limitado por regiones poligonales que se denominan *caras*. Los lados de las caras son las *aristas* del poliedro y los *vértices* de las caras coinciden con los vértices del poliedro.

La Pirámide:

Es un caso particular de poliedro en el cual todas las caras, excepto una, tienen un vértice en común.

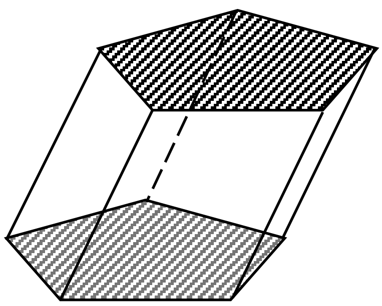


La cara que no contiene al vértice de la pirámide se denomina **base** de la misma.

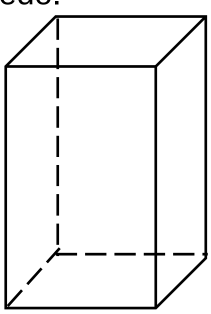
El prisma:

Es un poliedro que tiene:

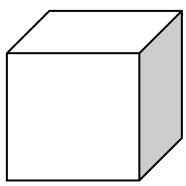
a) Un par de caras congruentes sobre planos paralelos. Dichas caras se llaman bases.
b) Todas las demás caras son paralelogramos.
c) Las aristas laterales son paralelas y congruentes.



Si las bases del prisma son paralelogramos, el prisma recibe el nombre de paralelepípedo.



Un caso particular de prisma es el **cubo**.



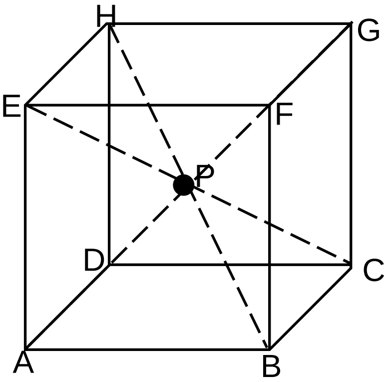
Tanto en los prismas como en las pirámides, las caras que no son bases se denominan **caras laterales** y las aristas que no pertenecen a la base se llaman **aristas laterales**.

Alturas:

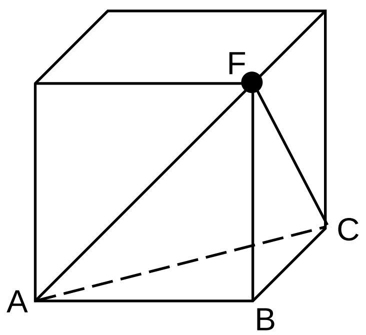
- Un segmento perpendicular a las bases de un prisma y que esté entre ellas es su altura.
- Un segmento entre el vértice de la pirámide y su base y que sea perpendicular a la base es la altura de la misma.
- Una pirámide es regular si su base es un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.
- Un prisma es recto si sus aristas laterales son perpendiculares a la base.

Ejercicios:

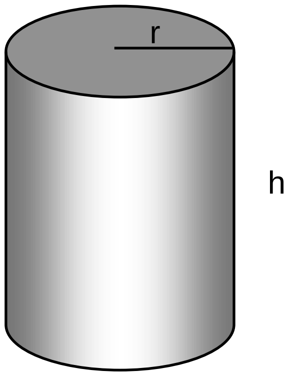
1) a) Dar el nombre del poliedro con vértices ABCDP.
b) En cuántas pirámides dividen al cubo los segmentos que van de P a cada uno de los vértices.



2) El cubo de la figura está cortado por el plano que pasa por A, C y F. Este corte forma la pirámide ABCF. Justificar que la pirámide es regular.



Área y volumen de cilindro.



Área = $2\pi \bullet r \bullet h + 2\pi \bullet r^2$

Volumen = $\pi \bullet r^2 \bullet h$

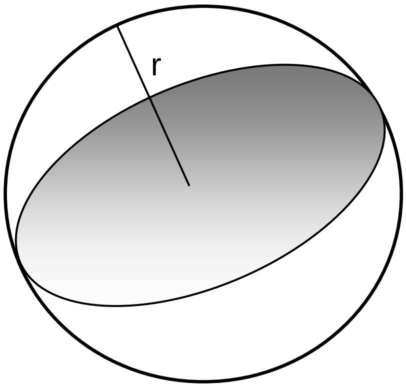
Problema:

Si el radio y la altura de un cilindro se duplican.¿cuánto se modifican su área y su volumen?

Área y volumen de la esfera:

$A = 4\pi \bullet r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi \bullet r^3$



TRIGONOMETRÍA

Objeto de la trigonometría.

Para estudiar las relaciones que pueden establecerse entre los lados de un rectángulo, resulta suficiente medir sus lados, lo que equivale a medir segmentos y deducir consecuencias de esas mediciones.

Si el polígono de menor número de lados en que pudiera descomponerse un polígono cualquiera fuese un rectángulo, las herramientas que nos provee la Geometría serían suficientes para estudiar las relaciones entre sus elementos. Pero es sabido que cualquier polígono puede descomponerse por complicado que sea, en un número finito de triángulos y si han de establecerse relaciones entre los lados de un triángulo es necesario **hacer intervenir en los cálculos las medidas de sus lados y de sus ángulos.**

La rama de la Matemática que se ocupa de este problema se denomina Trigonometría (del griego: **trigonos**: triángulo; **metría**: medida); utilizando esta disciplina estaremos en condiciones de abordar la resolución numérica de triángulos.

La trigonometría, resulta hoy en día de fundamental importancia en el estudio de algunos problemas del Análisis Matemático y en el de fenómenos vibratorios vinculados con la Física, para lo cual es imprescindible el conocimiento del concepto que desarrollaremos de **las relaciones trigonométricas**

Conceptualmente, el estudio de cualquier construcción geométrica del plano puede ser transformado, usando la Trigonometría, en un problema aritmético; la ventaja de esta transformación se ha ido acentuando con el correr de los años debido al auxilio de la computación, que permite realizar cálculos, por más complejos que ellos resulten, con mayor exactitud y rapidez que aquella que puede obtenerse apelando a soluciones gráficas, aunque se cuente con un dibujo "muy preciso".

La exactitud de los cálculos aritméticos se encuentra limitada por las imperfecciones propias de los elementos de dibujo; sin embargo no debe esperarse que **el problema** tratado en forma analítica conduzca a resultados **absolutamente exactos** ya que, como hemos dicho, antes de establecer las correspondientes relaciones y efectuar los cálculos requeridos, deben medirse los ángulos y los segmentos, a efectos de obtener los datos imprescindibles para resolverlo.

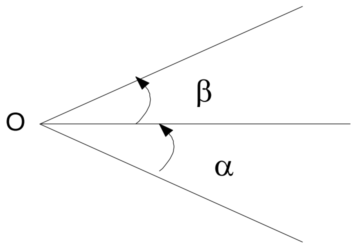
Se trata entonces, de efectuar mediciones previas al cálculo, y, como resultado de esas mediciones, solo por azar obtendremos números exactos; estaremos siempre limitados por imperfecciones, debidas tanto a la **calidad** de los instrumentos de medición, como a la "habilidad" del responsable de ejecutar la misma.

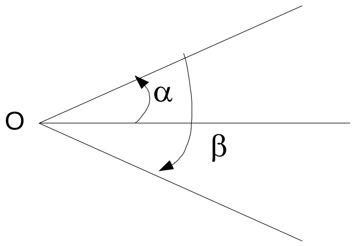
Nuestro problema, comienza entonces al "medir" y, para resolverlo, como resulta en general sencilla y conocida la medición de segmentos, nos ocuparemos fundamentalmente de la medición de ángulos.

MEDIR un ángulo, es **asignarle un número** de manera tal que, ese número, permita reproducirlo en cualquier parte, sin necesidad de transportarlo materialmente de un lugar a otro.

ÁNGULOS CONSECUTIVOS.

Son aquellos que tienen el vértice en común y, como lado común el final de un ángulo y el comienzo del otro:





Aquellos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo recto, se denominan **ángulos complementarios**.

Si los lados no comunes de dos ángulos consecutivos forman un ángulo llano, dichos ángulos reciben el nombre de **suplementarios**.

Los lados no comunes de dos ángulos consecutivos cualesquiera determinan un ángulo llamado **ángulo suma**.

RESOLUCION DE TRIANGULOS

El problema general de resolver un triángulo consiste en determinar sus elementos fundamentales (ángulos y lados) conociendo tres de ellos, de los cuales uno al menos debe ser un lado. Un triángulo queda determinado entonces si se dan:

a) dos lados y el ángulo comprometido.
b) un lado y dos ángulos.
c) los tres lados.
d) dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

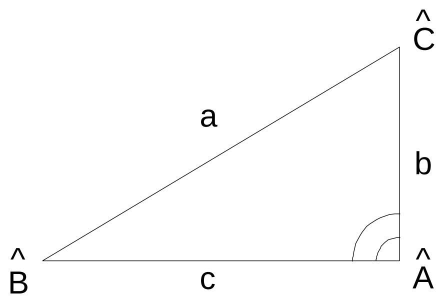
Si, como caso particular el triángulo es rectángulo, basta para determinarlo, conocer dos elementos (además del ángulo recto); que pueden ser:

a) la hipotenusa y un ángulo agudo.
b) un cateto y un ángulo agudo.
c) la hipotenusa y un cateto.
d) los dos catetos.

Dado, entonces, un triángulo rectángulo, para la resolución del mismo, utilizamos las relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1:

Resolver el triángulo rectángulo de la figura conocido un cateto y un ángulo agudo.



Datos: $\begin{cases} c = 4 \text{ m} \\ \hat{B} = 36º\ 52'\ 11'',63 \end{cases}$

Incognitas: $\begin{cases} a \\ b \\ \hat{C} \end{cases}$

a) Cálculo de $\widehat{C}$:

Los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son complementarios

$\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ $\quad$ $\widehat{C} = 90° - \widehat{B}$ $\quad$ $\boxed{\widehat{C} = 53°\,07'\,48'',37}$

b) Cálculo de a:

Siendo $\cos \widehat{B} = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{c}{\cos \widehat{B}}$

$a = \dfrac{4\ m}{\cos 36°\,52'11'',63} = \dfrac{4}{0{,}8}$ $\quad$ $\boxed{a = 5\ m}$

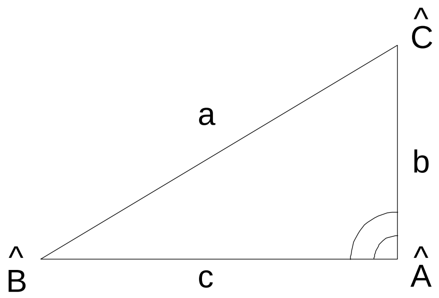
b) Cálculo de b:

Siendo $tg\ \widehat{B} = \dfrac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \bullet tg\ \widehat{B}$

$b = 4\ m \bullet 0{,}75$ $\quad$ $\boxed{b = 3\ m}$

Ejemplo 2:

Resolver el triángulo rectángulo de la figura, conocidos los dos catetos.



$$\text{Datos:}\begin{cases} c = 4\ m \\ b = 3\ m \end{cases}$$

$$\text{Incognitas:}\begin{cases} a \\ B \\ C \end{cases}$$

a) Cálculo de a:
Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 = (9 + 16)\ m^2 = 25\ m^2$.

$\boxed{a = 5\ m}$

b) Cálculo de $\widehat{B}$:

Siendo $tg\ \widehat{B} = \frac{b}{c} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \widehat{B} = arc \bullet tg\ 0{,}75$

$\boxed{\widehat{B} = 36°\,52'11'',63}$

c) Cálculo de $\widehat{C}$:

Los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son complementarios

$\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ $\qquad \widehat{C} = 90° - \widehat{B}$

$\boxed{\widehat{C} = 53°\,07'48'',37}$

Actividades

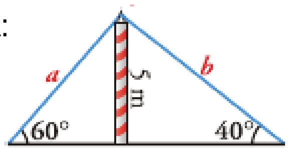
Ejercicio Nº 1.-Si una escalera de 10 metros de longitud se inclina 55º con respecto al piso; a que altura del muro llegará?

Ejercicio Nº 2.-Cuál es la altura de un edificio si cuando el sol está a 37º sobre el horizonte, arroja una sombra de 60 m?.

Ejercicio Nº 3.- Hallar el área de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de radio r= 1 m.

Ejercicio Nº 4.- Durante un aterrizaje, el piloto de un avión debe pasar reglamentariamente 50 m. por encima de una pared de 30 metros de altura y tocar tierra como mínimo a 700 metros de la pared. Hallar el ángulo límite de descenso.

Ejercicio Nº 5.- Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con dos cables: a y b, como muestra la figura:



a) Calcular la longitud de cada cable.
b) ¿Qué distancia separa a los extremos de los cables que tocan el suelo?

Ejercicio Nº 6.- Hallar la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 20 m desde el pie de la antena se observa su extremo superior elevando la visual un ángulo de 25°.

Ejercicio Nº 7.- Calcular la longitud que debe tener una escalera para que, apoyada en la pared alcance una altura de 2,85 m al formar con el piso un ángulo de 58°1'

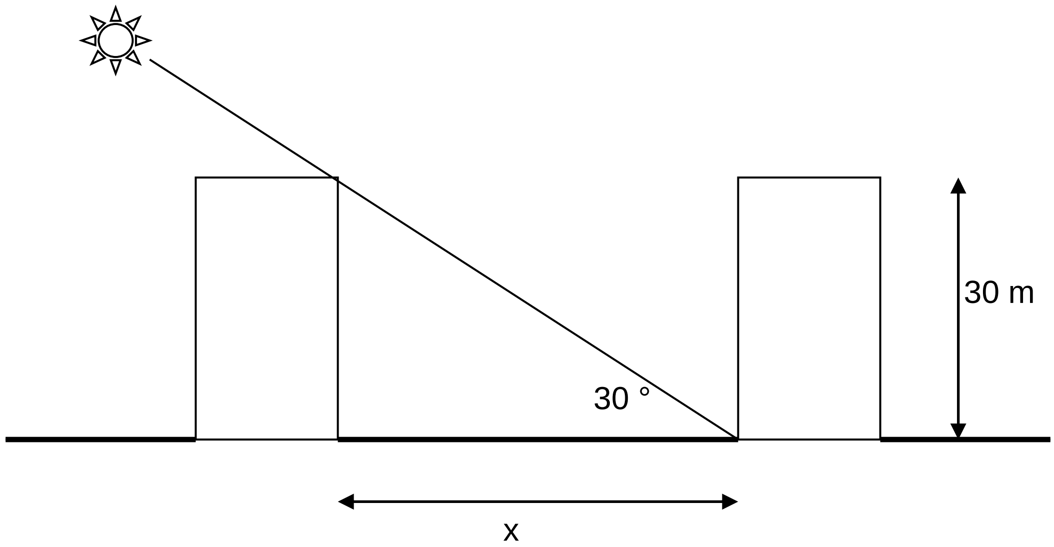
Ejercicio Nº 8.- Se colocaron 4 alambres de suspensión para una antena de transmisión y cada uno fue sujetado formando un ángulo de 72° con el piso. Si se utilizaron en total 150 m de alambre, ¿cuál es la altura de la antena?

Ejercicio Nº 9.- Se bajan 31,8 m desde un departamento hasta la planta baja y luego se camina en línea recta 300 m hasta un teléfono público. ¿Con qué ángulo de depresión se observa el teléfono desde la ventana del departamento?

Ejercicio Nº 10.-Una aerosilla de 756 m de largo sube esquiadores a una montaña hasta una altura de 238 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la aerosilla?

Ejercicio Nº 11.-Desde la terraza de un edificio, se observa, con un ángulo de depresión de 15°, un automóvil que se encuentra a 200 m del pie del edifico. ¿A qué altura se encuentra la terraza?

Ejercicio Nº 12.- A qué distancia deben ubicarse dos cuerpos de edificios de 30 metros de altura, para que la sombra que arroja uno de ellos llegue al pie del otro cuerpo cuando el sol está a 30º sobre el horizonte.

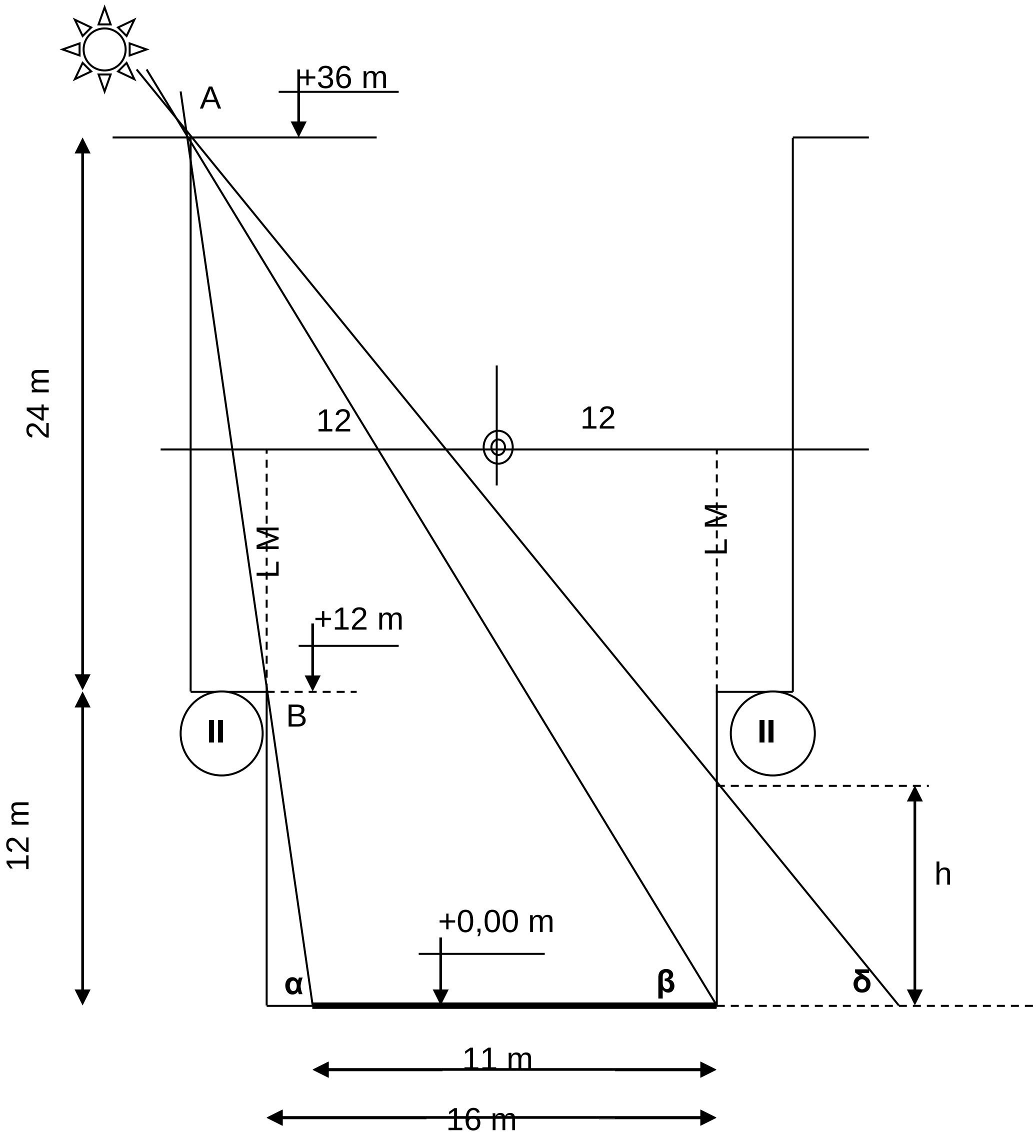


Ejercicio Nº 13.- Los planos límites de fachadas según el Código de Edificación son:

1) Hasta 12 m. de altura, coincidente con la Línea Municipal.
2) De 12 a 36m. de altura, paralelo a la Línea Municipal, a 12 m. del eje de la calzada.

Para el caso particular de una calle de 16 m. de ancho:

a) ¿Cuál es el ángulo α formado por el rayo del sol rasante a los puntos A y B, con la horizontal?
b) ¿Cuál es el ánguloβ, que marca la altura del sol sobre el horizonte, cuando la sombra arrojada por el edificio I, alcanza el pie del edificio II ?
c) ¿Cuál será la altura h de la sombra arrojada por el edificio I cuando el sol está a un ángulo δ = 55º sobre el horizonte?

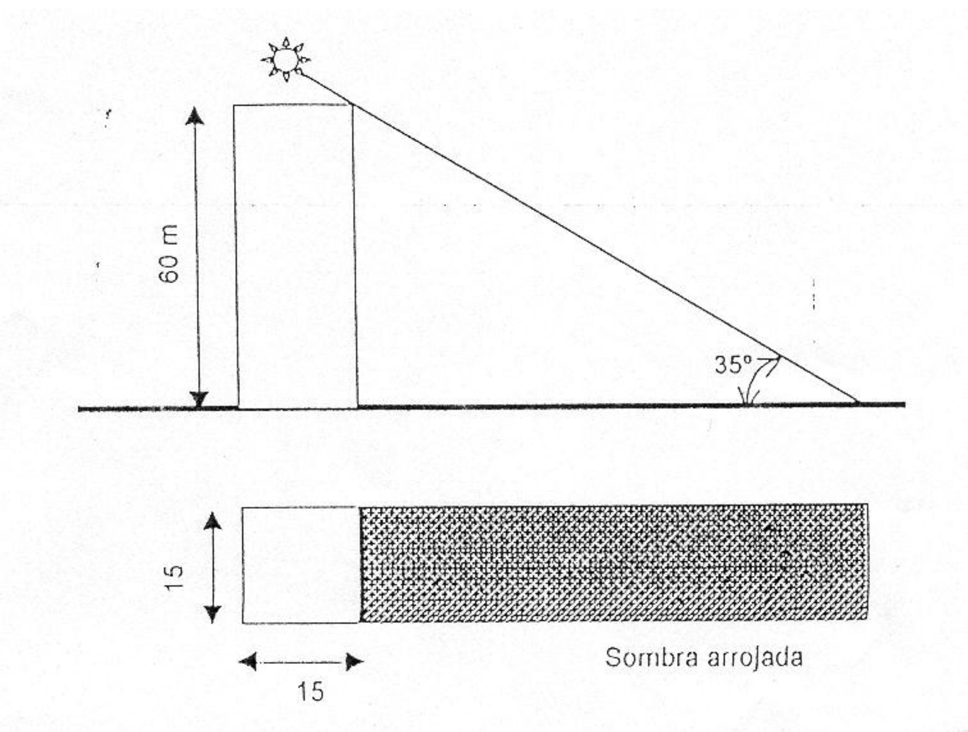


Ejercicio Nº 14.- Para la latitud de nuestra ciudad, la altura del sol al pasar por el meridiano del lugar (mediodía), en los equinoccios y solsticios es :

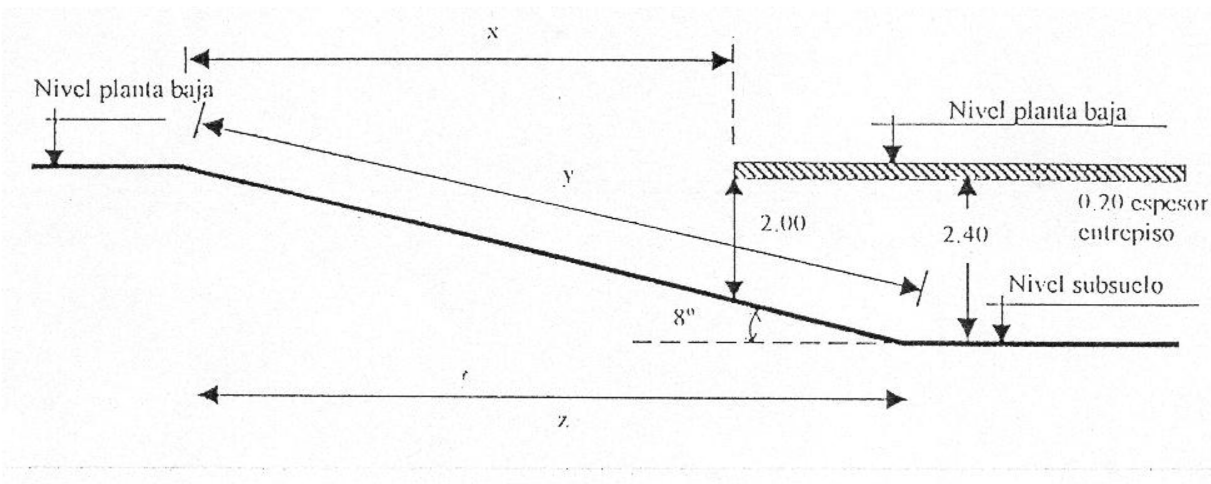
21 de junio (invierno) 30º
21 de setiembre – 21 de marzo (primavera- otoño) 55º
21 de diciembre (verano) 80º

a) Calcular la sombra arrojada, en cada una de esas fechas, por un edificio torre de planta cuadrada de 15 m. x 15 m. y de 60 m. de altura. Graficar.
b) Calcular la penetración del sol, en cada una de esas fechas, en un local de planta rectangular de 5 m. x 10 m., con una pared totalmente vidriada al Norte, en su lado menor. Altura libre del local: 3.00 m. Graficar.
c) Para el mismo caso anterior, calcular la medida del alero necesario, sobre la pared vidriada, para que el sol no penetre en la habitación el 21 de diciembre.

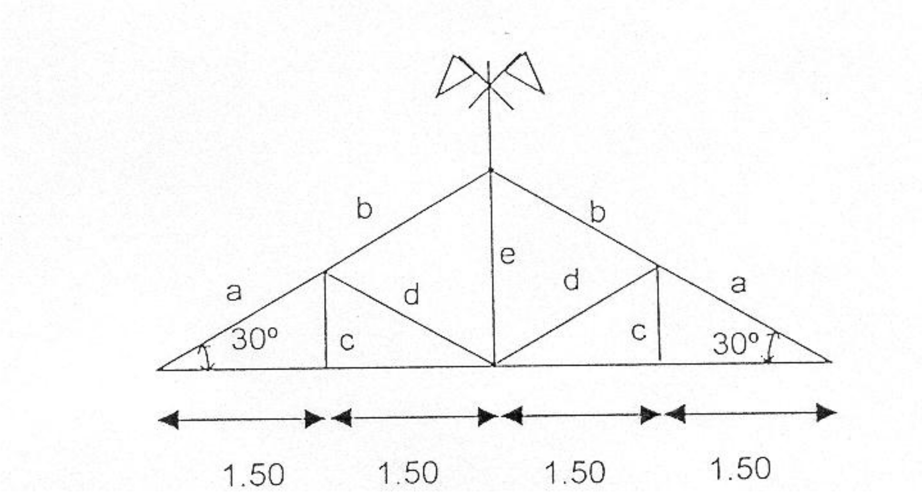
Ejemplo a)



Ejercicio Nº 15.-Una rampa de acceso a subsuelo desde planta baja, tiene las características y datos indicados en el corte. Calcular x, y, z.



Ejercicio Nº 16.- Calcular la longitud de las barras a, b, c, d, e de la estructura reticulada dibujada.



Ejercicio N° 17.-Se desea construir sobre un terreno cuadrado de 50m de lado, una pileta rectangular de 4 m de ancho por 10 m de largo. Para ello, se aconseja estudiar la sombra que proyectarían sobre la pileta, las paredes medianeras en los dos posibles lugares donde se pretende ubicar el natatorio y a partir de ese estudio seleccionar el más apropiado para su implantación (el lugar elegido será aquel que tenga al cabo del día menos sombra sobre la pileta).

El terreno está ubicado con orientación N-S; la pared medianera de la derecha del terreno mide 3 m de altura y la medianera de la izquierda es de 5 m de altura.

Caso 1: La pileta situada a 2 m de la medianera derecha, como muestra la figura.

Caso 2: La pileta situada a 7 m de la medianera izquierda y orientada en otra dirección, como muestra la figura.