## MATRICES

### INTRODUCCION :

Desde un punto de vista matemáticamente riguroso las matrices se definen teniendo en cuenta que sus elementos provienen de una relación funcional. Además los datos que corresponden a la información recogida sobre diversos temas suelen ser organizados frecuentemente en tablas de una o más entradas, es decir mediante conjuntos numéricos cuyos elementos están ordenados por uno o más subíndices. Formalmente una tabla unidimensional se denomina vector mientras que una bidimensional se designa con el nombre de matriz.

Una matriz se nomencla con una letra mayúscula, en este caso A; el elemento genérico se escribe $a_{ij}$, disponiéndose cada uno de los m x n elementos de R en m filas y en n columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \quad a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \quad a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \; a_{ij} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Todos los elementos de la matriz están indicados con una misma letra minúscula con dos subíndices; el primero es el número de orden de la fila contando desde arriba hacia abajo y el segundo el número de orden de la columna, contando de izquierda hacia derecha.

Con la palabra línea se designa indistintamente una fila o una columna.

En notación abreviada puede escribirse :

$$\mathbf{A = (a_{ij}) \text{ donde } i = 1,2,3,...m \quad y \quad j = 1,2,3....n}$$

Con esta notación el elemento $a_{23}$ está ubicado en la segunda fila y tercera columna. Cuando el número de filas es distinto del número de columnas, decimos que se trata de una matriz rectangular, en cambio cuando ambos números coinciden hablamos de matrices cuadradas.

**Ejemplo 1:**

Construir una matriz cuadrada de orden dos para la cual $a_{ij} = 2i - j$

Cada elemento de la matriz se obtiene de la siguiente manera:

$a_{11} = 2(1) - 1 = 1$ ; $a_{12} = 2(1) - 2 = 0$

$a_{21} = 2(2) - 1 = 3$ ; $a_{22} = 2(2) - 2 = 2$

**resultando:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hemos escrito una matriz de 2 filas por dos columnas; se dice que la matriz es de orden 2x2 <u>sin que ello signifique una operación aritmética</u>; si la matriz hubiera tenido 2 filas y 3 columnas, el orden sería 2x3. Cuando se trata de matrices del mismo número de filas y de columnas, es decir de matrices cuadradas, suele decirse simplemente, por ejemplo, que la matriz es de orden 2.

**Ejemplo 2:**

En un viaje de estudio realizado por alumnos de la Facultad, se han organizado cuatro grupos A, B, C, D conectados mediante equipos de radio de modo tal que A solo puede comunicarse directamente con B y D ; B sólo puede comunicarse con A ; C sólo puede comunicarse con D y D puede comunicarse con A y C. Presentar esta información mediante una matriz de orden 4, usando un 1 o un 0 para indicar si dos campamentos pueden comunicarse directamente o no.

$$\text{Solución} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 3:**

La tabla de posiciones del campeonato de fútbol es una tabla a doble entrada o bidimensional. Se trata de una matriz.

Considerando un espacio de n dimensiones, un vector puede representarse por una matriz; los elementos de ésta son las componentes del vector y pueden escribirse en fila o en columna. Si la disposición es en una fila, la matriz resulta de dimensión 1x n y se llama matriz fila o también vector fila, mientras que si la disposición es en columna, el orden es n x1 y hablamos de matriz o vector columna.

Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es una matriz columna de dimensión 3 x 1

Un caso particular lo constituye como ejemplo la matriz A= (3) de dimensión 1.

Teniendo en cuenta lo hasta aquí expresado, una matriz puede prácticamente ser considerada como la yuxtaposición ordenada de matrices fila o como una yuxtaposición ordenada de matrices columna.

Simbolizando con $F_i$ la fila i y con $C_j$ la columna j, podemos escribir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

**Algebra Matricial:**

**Igualdad.**

Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y además los elementos ubicados en la misma posición son iguales.

**Ejemplo 4:**

Hallar los valores de x, y, z, w si se satisface la igualdad:

$$\begin{pmatrix} x + y & 2z + w \\ x - y & z - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

igualando elemento a elemento correspondiente, resulta:

$$\begin{aligned} x+y &= 3 \\ 2z+w &= 5 \\ x - y &= 1 \\ z - w &= 4 \end{aligned}$$

sistema de ecuaciones lineales cuya solución es : **{ x = 2 ; y = 1 ; z=3 ; w= -1}**

**Suma de matrices:**

Si tenemos en cuenta que las filas o las columnas de una matriz pueden considerarse como vectores fila o como vectores columna, la operatoria entre matrices deberá ser equivalente a las reglas de operación entre vectores y dado que, los vectores se suman elemento a elemento correspondiente, definiremos en forma análoga la suma entre dos matrices con el agregado de que, para que dos matrices resulten sumables deben ser del mismo orden. La suma entre matrices de distinta dimensión no está definida.

Dadas entonces las matrices A = $(a_{ij})$ y B = $(b_{ij})$ ambas de orden mxn, la suma resultará ser una matriz C = $(c_{ij})$ de la misma dimensión de los sumandos y cuyos elementos se obtienen haciendo la suma de los elementos correspondientes de las matrices dadas.

$$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn} \quad ; \text{ con } (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

**Ejemplo 5:**

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Propiedades de la suma de matrices** : Como la operatoria entre matrices ha sido definida de manera análoga a la operatoria entre vectores, las propiedades de la suma entre matrices resultarán idénticas a las propiedades ya vistas de la suma entre vectores ; valen en consecuencia sin que sea necesaria la demostración.

**1)** La suma entre matrices es una ley externa o abierta: se suman elementos pertenecientes a un determinado conjunto y el resultado es un elemento del mismo conjunto.
**2)** Vale la propiedad conmutativa : A + B = B + A
**3)** Vale la propiedad asociativa : A + (B + C) = (A + B) + C
**4)** Existe en el conjunto un elemento neutro : (la matriz nula) A + N = A
**5)** Existe para cada elemento su inverso aditivo : A + (- A) = N (la suma de una matriz y su opuesto aditivo, da como resultado el elemento neutro en la operación)

**Producto de una matriz por un escalar :**

La operación tiene las mismas características que el producto de un vector por un escalar : todos los elementos de la matriz quedan multiplicados por el escalar y se conserva la dimensión de la matriz.

Demostración:

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y el escalar $\lambda = 2$

$$2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}$$

verifica que cada elemento de la matriz original queda multiplicado por el escalar 2

**Propiedades del Producto de una matriz por un escalar**.

**1)** Es una ley externa o abierta : (se multiplican elementos que pertenecen a conjuntos distintos y el resultado se da en uno de ellos : el conjunto de las matrices del mismo orden de la matriz factor del producto)

**2)** Vale la propiedad asociativa : $\alpha$ ($\beta$ A) = ($\alpha$ $\beta$) A

**3)** Vale la propiedad distributiva respecto de la suma de escalares : ($\alpha$ + $\beta$) A = $\alpha$ A +$\beta$A

**4)** Vale la propiedad distributiva respecto de la suma de matrices : $\alpha$ (A+B) = $\alpha$ A + $\alpha$ B

**5)** Existe el elemento neutro para la operación ; (el escalar 1) : 1 A = A

**Ejemplo 6** : (Válido para las operaciones descriptas de suma y producto por un escalar )

Hallar los valores de x, y, z y w que satisfacen:

$$2\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -1 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & x+y \\ z+w & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 & 5+x+y \\ -1+z+w & w+4 \end{pmatrix}$$

igualdad de matrices que da origen por igualación de sus elementos correspondientes al siguiente sistema de ecuaciones lineales

2 x = x + 2 $\rightarrow$ x = 2 $\rightarrow$ x = 2

2 y = 5 + x + y $\rightarrow$ y = x + 5 $\rightarrow$ y = 2 + 5 = 7

2 z = -1 + z + w $\rightarrow$ z = w - 1 $\rightarrow$ z = 4 - 1 = 3

2 w = w + 4 $\rightarrow$ w = 4 $\rightarrow$ w = 4

la solución es entonces el conjunto **{x = 2 ; y = 7 ; z = 3 ; w = 4}**

**Producto entre Matrices :**

Es una operación cuyo resultado, si existe, depende del orden en que se coloquen los factores y sólo es posible cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

Comencemos por tratar de multiplicar una matriz fila

$A_{1xn} = (a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots a_{1n})$ por una matriz columna $B_{mx1}$ **=** $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ **;** **con m=n** llamamos

entonces producto $A_{1xm} \times B_{mx1} = C_{1x1}$ a la matriz cuyo único elemento es

$c = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \ldots\ldots + a_{1n}\, b_{m1}$

Se trata del producto escalar entre la matriz o vector fila $A_{1xm}$ y la matriz o vector columna $B_{mx1}$, Observamos que para que el producto resulte posible el número de elementos del vector fila debe ser igual al número de elementos del vector columna, lo que significa que las dimensiones de ambos vectores deben ser iguales.

**Ejemplo 7:**Sean $A_{1x3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B_{3x1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ obtener $A_{1x3} \times B_{3x1} = C_{1x1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \left(3 \bullet 2 + 2 \bullet 1 + (-1) \bullet (-3)\right) = (6 + 2 + 3) = (11) = C_{1x1}$$

Sean ahora las matrices $A_{mxn} = (a_{ij})$ ; i = {1,2,.....,,m} ; j = {1,2,.......,n}

$B_{nxp} = (b_{ij})$ ; i = {1,2,......,,n} ; j = {1,2,........,p}

llamamos producto $A_{mxn} \times B_{nxp}$ en ese orden a la matriz $C_{mxp}$ que tiene igual número de filas que la matriz A e igual número de columnas que la matriz B**. (**Verificamos nuevamente que el número de columnas de la primer matriz (A) debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz (B).

Veamos algunos ejemplos:

$A_{2x3} \times B_{3x2} = C_{2x2}$

$B_{3x2} \times A_{2x3} = C_{3x3}$ ; de la definición de estos dos productos observamos que el producto entre dos matrices no es en general conmutativo.

$A_{2x3} \times B_{3x1} = C_{2x1}$

$B_{3x1} \times A_{2x3}$ no es posible (por ser el nº de columnas de B $\neq$ al nº de filas de A)

Disposición conceptual para el producto: trátase de multiplicar $A_{2x3} \times B_{3x2}$, debiéndose obtener $C_{2x2}$ ; sean entonces :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

en la intersección de la fila 1 de la matriz A con la columna 1 de la matriz B se encuentra el elemento $c_{11}$ cuya expresión se obtiene haciendo el producto escalar :

$c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31}$;  con análogo razonamiento:
$c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32}$
$c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23}\, b_{31}$
$c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23}\, b_{32}$

**<u>Propiedades del Producto entre Matrices</u>:**
**1)** En general , el producto entre matrices no es conmutativo : A B $\neq$ B A
**2)** Si, como caso particular A B = B A se dice que las dos matrices son permutables.
**3)** Si A B = - B A , las matrices se dicen anticonmutativas.
**4)** Vale la propiedad asociativa A $\bullet$ (B $\bullet$ C) = (A $\bullet$ B) $\bullet$ C
**5)** Vale la propiedad distributiva a izquierda : (A + B) $\bullet$ C = A $\bullet$ C + B $\bullet$ C
**6)** Vale la propiedad distributiva a derecha : A $\bullet$ (B + C) = A $\bullet$ B + A $\bullet$ C
**7)** Existe un elemento neutro (la matriz identidad) I $\bullet$ A = A
**8)** El producto de dos matrices no nulas puede ser una matriz nula ; en efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## MATRICES PARTICULARES.

**a) Matriz Diagonal.** Se da este nombre a una matriz cuadrada tal que, los elementos ubicados fuera de la diagonal principal son todos nulos.

Ejemplo: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**b) Matriz Escalar.** Es una matriz diagonal que tiene iguales todos los elementos ubicados sobre la diagonal principal.

Ejemplo: $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**c) Matriz Identidad.** Es una matriz escalar con todos los elementos de la diagonal principal iguales a la unidad.

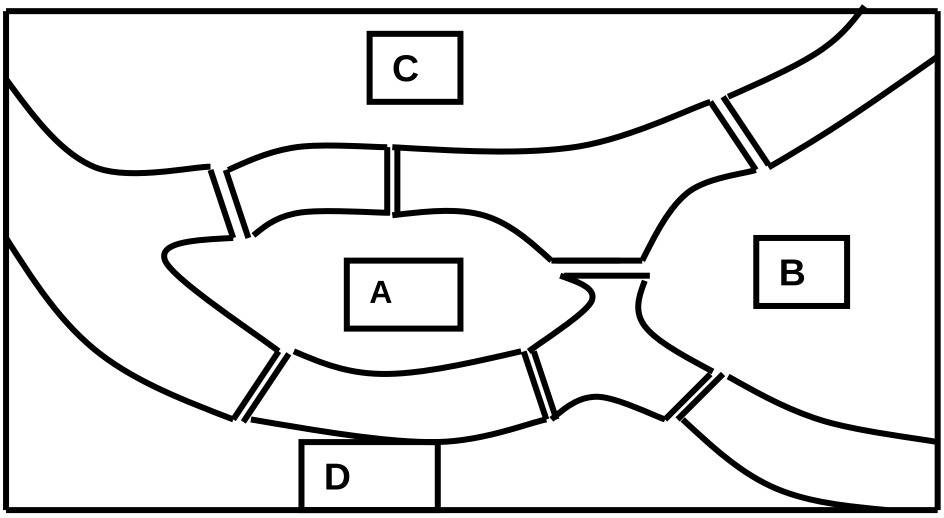
Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**d) Matriz traspuesta.** Dada una matriz A, recibe el nombre de matriz traspuesta de A, $A^t$ la matriz que se obtiene intercambiando ordenadamente filas por columnas (fila 1 por columna 1, etc.). No es necesario que la matriz sea cuadrada.

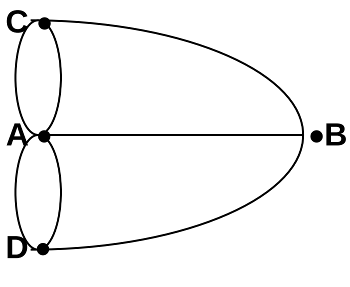
Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

# Introducción a la Teoría de Grafos.

La isla Kueiphof en Konigsberg (Pomerania) está rodeada por un río que se divide en dos brazos. Sobre estos brazos estaban construidos siete puentes, siendo para los habitantes un motivo de distracción descubrir un itinerario de modo tal que pudieran regresar desde cualquier punto al mismo punto después de haber cruzado por los siete puentes pasando solo una vez por cada uno de ellos.




En 1736, el matemático alemán Leonard Euler (1707-1782) paró en la ciudad y, para estudiar el problema, representó las distintas zonas **A** *(isla Kueiphof)*, **B, C** y **D** mediante puntos, mientras que a los puentes los simbolizó mediante líneas que unen dichos puntos. A la figura la llamó **grafo**, a los puntos **vértices** o **nodos** y a las líneas les dio el nombre de **aristas**.



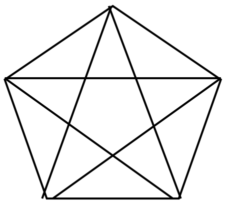

El Problema inicial se corresponde con el del esquema y consiste en verificar si partiendo de uno cualquiera de los cuatro puntos (A, B, C, D) puede seguirse un camino que pase por todas las curvas de una sola vez. Dicho de otra forma el problema consiste en estudiar si la figura se puede dibujar con un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo sitio.

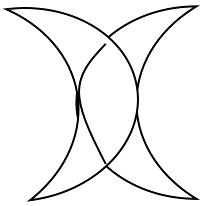
Para que ello sea posible, el número de líneas que concurren a un punto podrá ser impar a lo sumo en dos puntos de concurrencia, debiendo en los demás puntos concurrir un número par de caminos y en nuestro caso todos los puntos tienen un número impar de líneas que concurren a ellos, lo que nos indica que el problema no tiene solución.

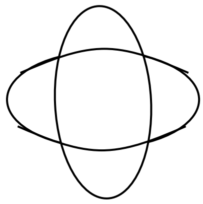
En efecto; a la isla A llegan cinco puentes; a la parte B llegan 3 puentes; a la orilla C llegan tres puentes y a la orilla D llegan tres.

**<u>Otros ejemplos</u>:**

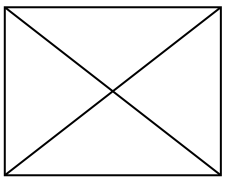
**a)** los siguientes dibujos pueden construirse de un solo trazo:

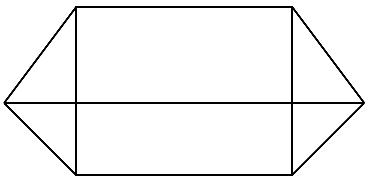


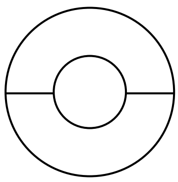




**b)** estos dibujos no pueden construirse de un solo trazo:



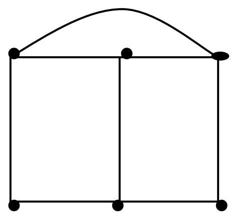




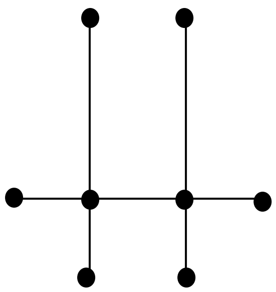
Este estudio de Euler dio origen a la **Teoría de Grafos**, que se emplea entre otros problemas en el estudio de los circuitos eléctricos, en los problemas de transporte, etc.

Un grafo es, por ejemplo, el mapa de las carreteras de la República Argentina, en el cual las ciudades están representadas mediante puntos (**nodos**) y los caminos que los unen mediante líneas (**aristas**).

Otros ejemplos de tipo similar son

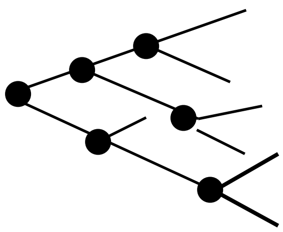


Kirchoff, en 1847 utilizó esquemas de este tipo al trabajar sobre circuitos eléctricos



Cayley en 1857 estudió la enumeración de los isótopos del compuesto orgánico $C_nH_{2n+2}$ usando un esquema en el que cada punto estaba unido con una o cuatro líneas de acuerdo a la valencia de enlace.

Jordan, en 1869 estudió estructuras de árbol en forma abstracta



En épocas más recientes se planteó el problema de colorear mapas de manera tal que países con frontera común, tuviesen colores diferentes.

Lo común en todos los casos planteados, es poder simbolizar un determinado problema mediante un esquema de las características de los que hemos descrito, llamado grafo, formado por puntos y líneas que los unen y estudiar soluciones al problema mediante reflexiones realizadas sobre el gráfico asociado.

Teniendo en cuenta que problemas distintos pueden tener como representación el mismo gráfico, un estudio sobre estos esquemas permite resolver múltiples problemas a la vez.

La conformación de un grafo se reduce generalmente a plantear el problema que se estudia utilizando un esquema simple.

En el trazado que realizamos no tienen importancia ni la forma, ni la longitud de las líneas que unen los puntos ni las ubicaciones relativas de los mismos; solo interesa visualizar las conexiones establecidas entre los puntos (nodos).

La Teoría de Grafos ha dado resultados importantes en distintos campos de la actividad del hombre y, aplicada a problemas diversos ha demostrado importantes ventajas sobre algunos procedimientos analíticos.

La idea gestacional de la Teoría de Grafos puede explicarse de la siguiente manera:

Para analizar un determinado problema podemos trazar:

**Puntos**: para representar los elementos del conjunto que se estudia.

**Líneas**: para representar las relaciones que vinculan los elementos.

Este simple razonamiento es, sin duda, la causa que dio origen, en diferentes disciplinas a similares esquemas que reciben distintos nombres; organigramas, circuitos eléctricos, árboles genealógicos, hojas de ruta, etc,...

Resulta frecuente en la vida cotidiana establecer relaciones entre los elementos de dos o más conjuntos, o bien, entre los elementos de un mismo conjunto.

Dar una relación ***R*** es fijar una cierta ley que permita decidir para cada par de elementos **a** y **b** si **a** está relacionado con **b** o no. Escribimos **a*R*b** para indicar que **(a,b)** $\in$ ***R***. Si por ejemplo ***R*** es la relación "**a** es hermano de **b**", **Juan *R* José** o bien el par **(Juan, José)** significan que Juan es hermano de José.

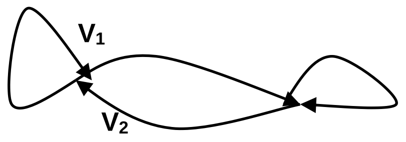
Estudiaremos ahora, como caso particular, las relaciones definidas en un mismo conjunto; para el caso que nos interesa en la Teoría de Grafos un conjunto de elementos $v_i$ que llamamos vértices

Dado el conjunto V = $\{v_1; v_2\}$ podemos formar los siguientes pares ordenados $(v_1,v_1)$ ; $(v_1,v_2)$ ; $(v_2,v_1)$ ; $(v_2,v_2)$. Si el número de elementos de V es n, podemos formar $n^2$ pares ordenados. Como hemos visto el conjunto de todos los pares ordenados posibles, recibe el nombre de Producto Cartesiano **V** x **V** y corresponde a la relación más completa que se puede establecer con los elementos de un conjunto ya que vincula a cada elemento de V consigo mismo y con todos los demás elementos de dicho conjunto.

Si solamente algunos de los pares ordenados de **V** x **V** cumplen con una determinada propiedad, dicha propiedad es una *partición* del conjunto **V** x **V** en dos subconjuntos: el de los pares ordenados que verifican la relación y el de aquellos que no la verifican.

Estos dos conjuntos reciben el nombre de Grafos de **V**.

Al igual que lo que sucede con las relaciones, un grafo puede representarse mediante diagramas de Venn, diagramas cartesianos, utilizando tablas a simple entrada, a doble entrada que llamamos matrices, pero la practicidad de la representación ha hecho prevalente sobre estos grafismos la utilización del denominado diagrama sagital o simplemente, grafo, que para nuestro ejemplo tiene el aspecto:

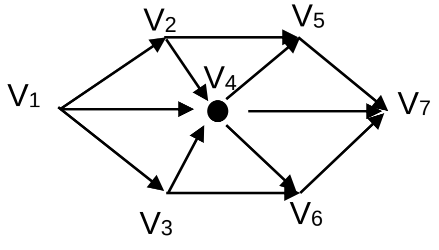



De una manera más simple y conceptual un grafo queda definido por un conjunto de elementos $v_i$ pertenecientes a un conjunto V y una ley de correspondencia C entre dichos elementos. En nuestro Grafo $V = \{v_1,v_2\}$ y la ley de correspondencia C se expresa

$$C(v_1) = (v_1,v_2)$$
$$C(v_2) = (v_1,v_2)$$

Los grafos pueden ser orientados o no, según que lo sean o no sus aristas; el grafo que hemos representado es orientado.

Veamos otro ejemplo:




El conjunto de los vértices es $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y la ley de correspondencia:

$$C(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$$
$$C(v_2) = \{v_4, v_5\}$$
$$C(v_3) = \{v_4, v_6\}$$
$$C(v_4) = \{v_5, v_6, v_7\}$$
$$C(v_5) = \{v_7\}$$
$$C(v_6) = \{v_7\}$$
$$(v_7) = \phi$$

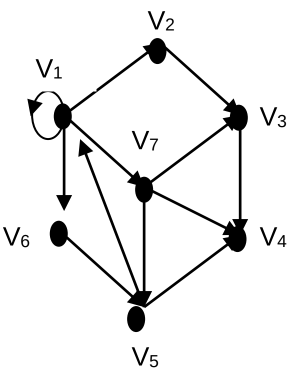
Observemos que aunque existe conexión entre $v_4$ y $v_3$ estando el arco orientado no se puede ir de $v_4$ a $v_3$. Del mismo modo, el nodo $v_7$ está conectado con $v_4$, $v_5$ y $v_6$ pero no se puede avanzar en contra de cada una de las flechas. Por esta razón a la ley de correspondencia de $v_7$ la designamos con $\phi$ (conjunto vacío).

Como puede entenderse con facilidad, resulta interesante dar vida real a los nodos asociándolos con ciudades o establecimientos y a los arcos como símbolo de rutas o carreteras.

Para un grafo orientado tal como el del ejemplo precedente resulta interesante definir:

**Camino: c**onjunto de dos o más arcos.
**Circuito:** camino cerrado.
**Bucle: cami**no de un solo arco.
**Longitud de un camino:** es el número de arcos que lo componen.

Pueden ser simples, si no se repite ningún arco y compuestos cuando se repite algún arco. Se denominan elementales cuando no se repite ningún vértice y no elementales, si se repite alguno.




En el grafo de la figura anterior pueden verse:

<u>Caminos ($V_1 – V_4$):</u>

Se dan a continuación algunos de los caminos posibles entre los nodos $V_1$ y $V_4$.

$V_1 – V_7 – V_4$
$V_1 – V_2 – V_3 – V_4$
$V_1 – V_7 – V_5 – V_4$

**Actividad:** escribir otros tres caminos entre los vértices $V_1$ y $V_4$.

**<u>Circuitos $v_1$</u>:**

$V_1 – v_7 – v_5 – v_1$
$V_1 – v_6 – v_5 – v_1$

**Bucle $v_1$:** el bucle $v_1 - v_1$ es único.

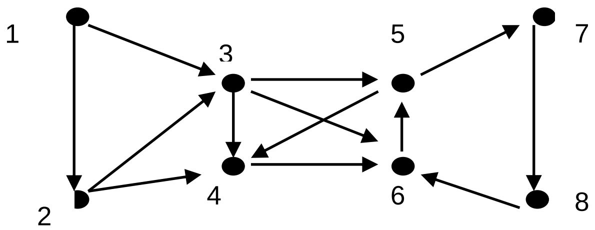
**Subconjuntos de un grafo:**

a) **Subgrafo:**

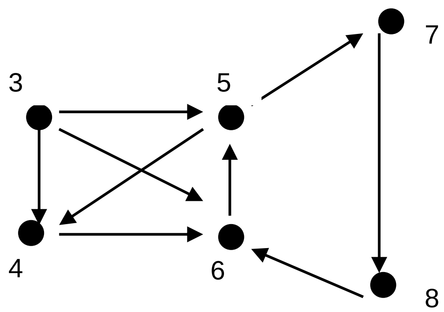
Si de todos los vértices de un grafo consideramos solamente algunos de ellos con todos los arcos que le corresponden en el grafo original, definimos lo que se denomina subgrafo. En otras palabras, un subgrafo tiene una parte de los vértices del grafo y conserva todos los arcos que corresponden al grafo total.

Como ejemplo si el grafo total corresponde a la red carreteras de la República Argentina, un subgrafo podría ser la red de carreteras de la Provincia de Buenos Aires.

Para el grafo que corresponde a la siguiente figura (grafo total):

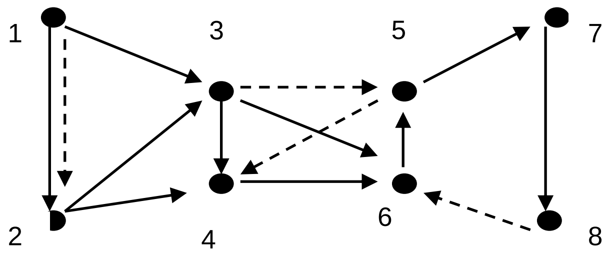



si queremos estudiar, por ejemplo una red de distribución de un producto entre los puntos 3, 4, 5, 6, 7 y 8, obtendremos el subgrafo de la figura siguiente:

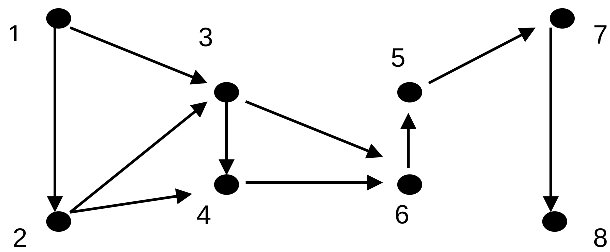



b) **Grafo parcial:**

Cuando a partir de un grafo dado no varía el número de vértices, pero acotamos la ley de correspondencia entre ellos, obtenemos un grafo parcial;

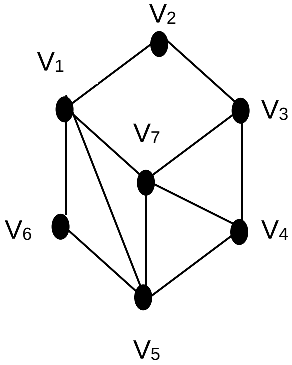



Si las ——→ indican las carreteras provinciales y los - - - - -→ caminos municipales, la figura siguiente es un grafo parcial:




**<u>Grado de un vértice:</u>**

Si se trata de un grafo **no orientado,** el **grado** de cada uno de sus vértices es el número de arcos que llegan a él. En el grafo de la figura el grado de $V_1$ es cuatro y grado de $v_3$ es tres. Se simboliza:



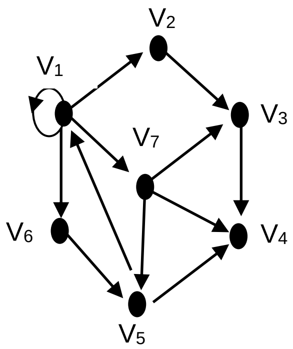

$gv_1) = 4$
$g(v_3) = 3$

Si el grafo está orientado, deben definirse los conceptos de **semigrado interior y exterior**.

**Actividad:** Obtener los grados de los vértices 1, 2, 3, 4, 5, y 6 del grafo de la figura anterior.

**Semigrado interior** es el número de arcos que inciden sobre un determinado vértice

**Semigrado exterior** es el número de arcos que salen de él.




En este grafo el semigrado interior de $v_7$ es igual a uno y el semigrado exterior del mismo vértice vale 3. Se simboliza:

$$g_i\,(v_7) = 1$$
$$g_e\,(v_7) = 3$$

**Actividad:** Obtener los semigrados interior y exterior de los restantes vértices del grafo de la figura.

**Número grado de un grafo:**

Llamamos número grado de un grafo y lo simbolizamos g(G) el máximo de los grados de sus vértices si el grafo es no orientado y la máxima suma de los semigrados exterior e interior del mismo vértice, cuando está orientado; es decir: $g(G) = \max\,(g_e(v_i) + g_i(v_i))$.

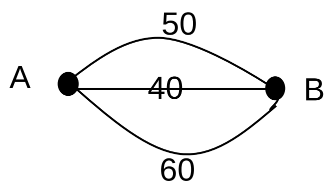
**Actividad:** Obtener los números de grado de los vértices del grafo de la figura anterior.

**Algunas aplicaciones importantes de Matrices y Grafos:**

Como hemos visto hasta ahora, hemos concebido un grafo como un conjunto de vértices y una ley de correspondencia para cada uno de ellos que indica como está relacionado cada elemento del conjunto que se estudia con cada uno de los restantes elementos.

Podemos agregar, a los efectos de estudiar diversos problemas otra información sobre los arcos; dicha información está directamente relacionada con el "valor" que podemos asignar a cada uno de los mismos.

Supongamos que dos ciudades cualesquiera A y B están relacionadas entre sí mediante tres rutas:




Si asignamos un valor a cada uno de los arcos, podemos decir, por ejemplo que los caminos que unen las ciudades A y B tienen 50, 40 y 60 Kilómetros respectivamente. En este supuesto el valor de cada uno de los arcos indica el valor de la variable distancia. Pero podrían interesarnos otras variables distintas, como ser el tiempo que se tarda en recorrer cada camino o el costo del peaje de cada una de las carreteras.

Cuando se trata de la variable tiempo, debe tenerse en cuenta que dicha variable no es necesariamente proporcional a la longitud del camino ya que depende, entre otros parámetros del tipo y estado de cada una de las rutas. Estas consideraciones deberán tenerse en cuenta al momento de elegir las variables que intervienen en el grafo; de este modo, a partir de las variables que se elijan deberemos optimizar unas u otras.

Habrá ocasiones, como veremos, en las que lo que más interesa es el costo del transporte, expresándose el costo en unidades monetarias (u.m) por kilómetro recorrido.

Supongamos ahora que una fábrica elabora productos para lo cual deben efectuarse un cierto número de operaciones; cada operación necesita emplear un cierto tiempo y algunas operaciones deben ser terminadas antes de comenzar otras. El problema consiste en elaborar un plan de trabajo que permita elaborar el producto en el menor tiempo posible. Una manera de resolver este problema consiste en construir un grafo en el cual cada una de las operaciones estará representada por un punto y en cada punto un número que indicará el tiempo que demanda la operación. Las secuencias en que se realizarán las operaciones deberán indicarse mediante flechas.

Para determinar un plan óptimo deberá explorarse metodológicamente el grafo construido con el objeto de determinar un **camino crítico** que ejecute todo el proceso en el menor tiempo posible.

Todo esto conduce al tratamiento de las componentes del grafo de una forma u otra según sean las variables a optimizar; la solución se obtiene en cada uno de los casos mediante distintos modelos de gestión que adquieren denominaciones típicas.

Veamos algunos modelos:

**<u>Aplicaciones a Problemas de la Ciencia de la Conducta</u>:**

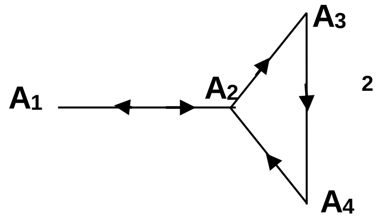
Las matrices que tienen como elementos solamente ceros y unos resultan de suma utilidad en el análisis de gráficas y de redes.

Una red de comunicación consiste en un conjunto de personas $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc. tales que entre algunos pares de esas personas existe posibilidad de comunicación.

La comunicación entre dos elementos cualesquiera del conjunto puede establecerse en un sentido o en dos. Por ej. La comunicación en dos sentidos podría efectivizarse mediante el uso de teléfono o radio, mientras que una comunicación en un sentido es, por ejemplo, la que utiliza una señal luminosa, una paloma mensajera, una señal de humo o acústica.

Utilizaremos el símbolo >> para indicar una conexión; $A_i$>>$A_j$ significa que el individuo $A_i$ puede comunicarse con $A_j$ (en ese sentido). El único requisito que debe establecerse es: "Es falso que $A_i$ >> $A_i$ para todo i, esto es, un individuo no puede (o no necesita) comunicarse consigo mismo.

Una determinada red de comunicación queda expresada mediante un grafo (también denominado diagrama sagital), en el cual los individuos están representados por puntos $A_1$, $A_2$, etc... y las vinculaciones mediante segmentos dirigidos (el sentido de la dirección está representado por flechas); por ejemplo:




El diagrama precedente puede expresarse asimismo mediante una matriz cuadrada cuyos elementos son ceros y unos :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en esta matriz los elementos de la fila 1 representan respectivamente las comunicaciones entre $A_1$ y todos los individuos que intervienen en la red de comunicación ; el 1 de la primera fila ubicado en la posición $d_{12}$ nos indica que

**$A_1 >> A_2$ ($A_1$ se comunica con $A_2$)**

La condición "Es falso que $A_i >> A_i$ se manifiesta en la matriz por el hecho de que los elementos de la diagonal principal (que tiene subíndices iguales) son todos nulos.

Otro ejemplo es el que corresponde a una relación de dominancia : es ésta una clase especial de relación de comunicación en el cual además de la propiedad ya vista :

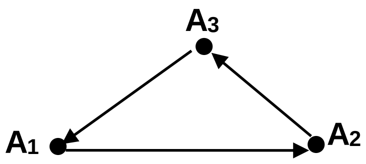
**1)** Es falso $A_i >> A_i$, (es falso que $A_i$ se domine a sí mismo), vale :

**2)** para cada par i,j con $i \neq j$, $A_i >> A_j$ ó $A_j >> A_i$ , pero no ambas a la vez : dicho en palabras : para cada par de individuos existe exactamente uno que es dominante.

**3)** Si $A_i >> A_j$ y $A_j >> A_k$ no vale necesariamente $A_i >> A_k$ (no se verifica la propiedad transitiva de las relaciones).

Este tipo de relación se verifica en la competencia entre equipos atléticos si no se admiten los empates.

Las relaciones de dominancia suelen describirse utilizando grafos dirigidos, o bien mediante matrices. Por ejemplo:

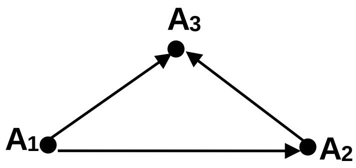



$\Downarrow$

$A_1 >> A_2$
$A_2 >> A_3$
$A_3 >> A_1$

$\Downarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




$\Downarrow$

$A_1 >> A_2$
$A_1 >> A_3$
$A_2 >> A_3$

$\Downarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que tanto la matriz de comunicación como la de dominancia son cuadradas, podemos computar sus potencias $C^2$, $C^3$, etc.

Haciendo $C\,C = C^2 = E = (e_{ij})$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

el elemento genérico del producto $e_{ij}$ se obtiene multiplicando la fila i por la columna j , resultando :

$$e_{ij} = c_{i1}\,c_{1j} + c_{i2}\,c_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{ik}\,c_{kj} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{in}\,c_{nj}$$

Un término del segundo miembro de la expresión anterior (por ejemplo el genérico de la forma $c_{ik}\ c_{kj}$) puede ser no nulo sólo si ambos factores son no nulos, o lo que es lo mismo si ambos factores son iguales a uno.

Cuando esto se verifica, es decir cuando:

$C_{ik} = 1 \Rightarrow A_i >> A_k$
y si $C_{kj} = 1 \Rightarrow A_k >> A_j$
como se dan simultáneamente ambas situaciones :

$$A_i >> A_k >> A_j$$

que implica una dominancia establecida en dos etapas entre $A_i$ y $A_k$

**Ejemplo:**
Sea una relación de dominancia establecida entre cuatro individuos y expresada mediante la matriz

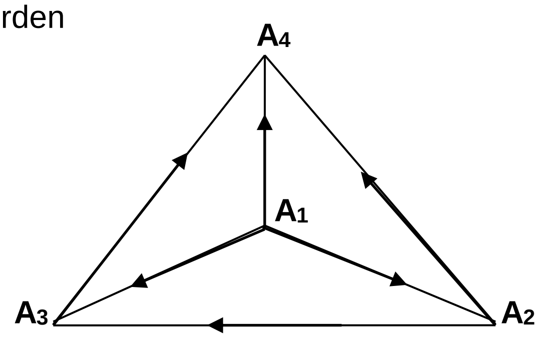
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{hacemos } C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenida la matriz producto analizamos el 2 situado en el ángulo superior derecho (elemento $e_{14}$)

$$2 = e_{14} = c_{11}\ c_{14} + c_{12}\ c_{24} + c_{13}\ c_{34} + c_{14}\ c_{44}$$
$$e_{14} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$A1>>A2>>A4 \ \wedge\ A1>>A3>>A4$$

En el grafo que corresponde al caso estudiado, pueden visualizarse las relaciones de segundo orden



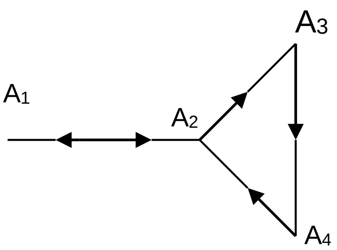

Se leen en el grafo las siguientes relaciones de primer orden :

$A_1 >> A_2$ ; $A_1 >> A_3$ ; $A_1 >> A_4$ ; $A_2 >> A_3$ ; $A_2 >> A_4$ ; $A_3 >> A_4$
y las que se detallan de segundo orden :

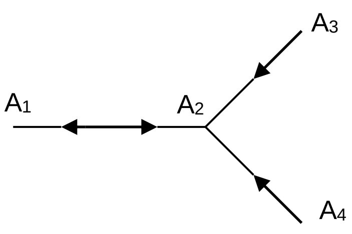
$A_1 >> A_2 >> A_3$ ; $A_1 >> A_2 >> A_4$ ; $A_1 >> A_3 >> A_4$ ; $A_2 >> A_3 >> A_4$

Sean ahora los siguientes diagramas sagitales y sus correspondientes matrices:

$$\begin{array}{c|c} & A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4 \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$




$$C_4 = \begin{array}{c|c} & A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4 \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$




En estos casos particulares, donde existe comunicación recíproca entre individuos ($A_1 >> A_2$ y $A_2 >> A_1$) no se cumple la condición que $\mathbf{a_{ij} = 1}$ $\mathbf{a_{ji} = 0}$ como se puede ver, con los elementos recíprocos.

$$a_{12} = 1 \text{ y } a_{21} = 1$$

Siendo las matrices de comunicación cuadradas, podemos calcular efectuando el producto de las mismas, las potencias sucesivas, es decir $C^2$, $C^3$, etc.

Por ejemplo, si efectuamos el producto de $C_3$ por si misma, resulta:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{x} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$C_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $e_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \cdot a_{kj}$

$$e_{11} = c_{11}c_{11} + c_{12}c_{21} + c_{13}c_{31} + c_{14}c_{41}$$

teniendo en cuenta la definición del producto de matrices.

Un término de la forma $a_{ik} \cdot a_{kj}$ solamente puede ser distinto de cero, como ya hemos expresado, si ambos factores son distintos de ceros, es decir si ambos factores son iguales a la unidad.

Si resulta que $c_{ik} = 1$ esto significa que $A_i$ tiene comunicación con $A_k$ es decir ($A_i >> A_k$). Si además $c_{kj} = 1$ significa que $A_k$ tiene comunicación con $A_j$, es decir, ($A_k >> A_j$); resultando en consecuencia $A_i >> A_k >> A_j$, relación de COMUNICACIÓN que se denomina:

## RELACION DE COMUNICACION EN DOS ETAPAS O DE SEGUNDO ORDEN.

El número resultante del cálculo de $e_{ij}$ expresa el número de relaciones de COMUNICACIÓN EN DOS ETAPAS O DE SEGUNDO ORDEN, lo cual significa que el individuo $A_i$ se comunica con el individuo $A_j$ de una o más maneras distintas.

En el ejemplo dado, por ser $c_{11} = 1$ indica que $A_1$ puede comunicarse consigo mismo en dos etapas, que son:

$$A_1 >> A_2 >> A_1$$

Por ser $c_{13} = 1$ indica que $A_1$ se comunica con $A_3$ en dos etapas que son:

$$A_1 >> A_2 >> A_3$$

De la misma manera por ser $c_{22} = 1$ nos indica que $A_2$ tiene una relación de comunicación consigo mismo, de segundo orden, es decir:

$$A_2 >> A_1 >> A_2$$

Para $c_{32} = 1$resulta: $A_3 >> A_4 >> A_2$

Para $c_{41} = 1$resulta: $A_4 >> A_2 >> A_1$

Para $c_{43} = 1$resulta: $A_4 >> A_2 >> A_3$

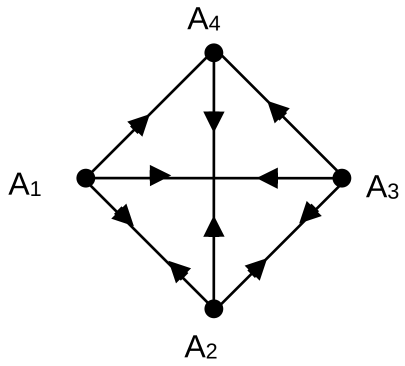
De esta manera, todas las relaciones de comunicación de segundo orden, puede explicitarse desarrollando el correspondiente elemento de la matriz $C_3^2$ o bien observando el diagrama sagital o de flechas correspondiente.

El cubo de la matriz $C^3_3 = C_3^2 \times C^1_3$ nos puede suministrar la información de tercer orden o tercer grado, de una manera completamente análoga a lo que nos suministra $C_3^2$ en las comunicaciones de segundo orden.

Así siguiendo, podríamos calcular las potencias $C_3^4$, $C_3^5$, ... etc. de una matriz, para obtener información sobre comunicaciones entre los individuos, más indirecta, en los grupos que se estudian.

Si en lugar de utilizar la relación "SE COMUNICA CON" entre los individuos, ponemos como relación la expresión "ELIGE" la matriz obtenida se llamará MATRIZ DE ELECCION, mientras que si utilizamos la relación "DOMINA" obtendríamos un estudio de MATRICES DE DOMINANCIA, etc.

**EJEMPLO:** Efectuar el siguiente análisis en el diagrama de flechas y hallar las comunicaciones de segundo orden.




$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$AxA = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_{11}$ dos comunicaciones de segundo orden:

$A_1 >> A_2 >> A_1$
$A_1 >> A_3 >> A_1$

$c_{12}$ dos comunicaciones de segundo orden:

$A_1 >> A_3 >> A_2$
$A_1 >> A_4 >> A_2$

$c_{13}$ una comunicación de segundo orden: $A_1 >> A_2 >> A_3$
$c_{14}$ una comunicación de segundo orden: $A_1 >> A_2 >> A_4$
$c_{21}$ una comunicación de segundo orden: $A_2 >> A_3 >> A_1$

$c_{22}$ tres comunicaciones: $A_2 >> A_1 >> A_2$
$A_2 >> A_3 >> A_2$
$A_2 >> A_4 >> A_2$
$c_{23}$ una comunicación: $A_2 >> A_1 >> A_3$
$c_{24}$ dos comunicaciones: $A_2 >> A_1 >> A_4$
$A_2 >> A_3 >> A_4$

**Actividad**: escribir las restantes comunicaciones de segundo orden

## TRABAJO PRÁCTICO

## MATRICES - GRAFOS

**Ejercicio Nº 1:** Dadas las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) A + B
b) (-1) A
c) 3 (A + B)
d) (-3) A + 2 B

**Ejercicio Nº 2:** Dadas las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz D de manera tal que:

a) 2 A + 2 B = 4 D
b) 2 A + 3 B - 4 D = 5 A

**Ejercicio Nº 3:** Escribir explícitamente las matrices definidas por:

a) A 3 x 4 si $a_{ij}$ =. i + j
b) A 3 x 3 si $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

**Ejercicio Nº 4:** En cada uno de los siguientes casos efectuar, cuando sea posible, los productos A x B y B x A de las matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

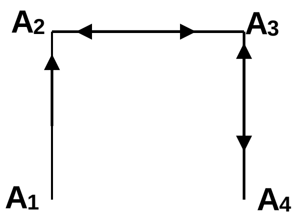
b) $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$

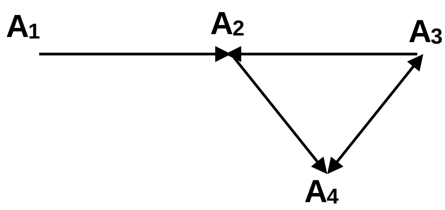
d) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 1 & 3\\2 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\4 & 2 & 2\\-2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

**<u>Ejercicio Nº 5</u>:** Dados los siguientes diagramas sagitales o grafos, armar las matrices correspondientes y estudiar las comunicaciones de 1$^{\underline{ro}}$ y 2$^{\underline{do}}$ orden.

a)




b)

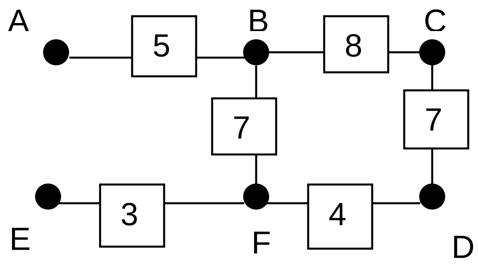



**<u>Ejercicio Nº 6</u>:** Dibujar un grafo que corresponda a la siguiente matriz de comunicación:

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

**<u>Ejercicio Nº 7</u>:** Si queremos conectar seis barrios con el menor número de caminos posibles, ¿cuántos hacen falta? ¿Y si queremos conectarlos en forma máxima?

**Ejercicio Nº 8:** Escribir la matriz de comunicación para el siguiente grafo y estudiar las comunicaciones de segundo y de tercer orden. (A,B,C,D,E,F son los v




**Ejercicio Nº 9: Aplicación al Urbanismo: ubicación óptima de un Centro de Salud.**

El grafo del problema anterior representa la ubicación de seis barrios de una ciudad entre los cuales se pretende ubicar la posición de un Centro de Salud de manera óptima. Los números que se han colocado sobre los arcos indican la longitud de cada camino. Un primer estudio técnico ha decidido que el Centro de Salud se ubicará en aquel barrio que verifique la condición de que la máxima distancia recorrida por uno de sus vecinos para llegar a los otros barrios sea la mínima posible.

a) Escribir la matriz que simbolice las distancias mínimas para ir de un barrio a otro y decidir por su observación el barrio en que se instalará el Centro de Salud.

b) Cuales son los barrios que están mejor comunicados?

c) Si se deseara que todos los barrios estén conectados directamente mediante caminos, cuántos caminos nuevos deberán construirse?

d) Si se espera que, en promedio, una ambulancia del Centro de Salud debería realizar dos auxilios diarios a cada barrio, cuántos litros de combustible habrá que comprar para los próximos treinta días si el consumo es de un litro cada 12 kilómetros?.