LA LINEA RECTA: DEFINICIÓN.

Recibe el nombre de línea recta el lugar geométrico de los puntos tales que, tomados dos puntos cualesquiera distintos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ el valor de la expresión:

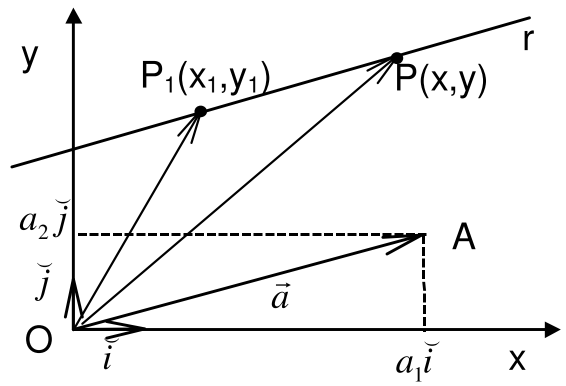
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

resulta siempre constante.

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA.

Una recta queda geométricamente determinada, entre otras formas, si se conocen las coordenadas (x_1,y_1) de un punto P_1 que le pertenece ($P_1 \in r$) y la dirección determinada por un vector $\vec{a}$.
Si P(x , y) es un punto de la recta r podemos escribir los siguientes vectores referidos al sistema coordenado cartesiano ortogonal xy.

$$\begin{aligned} \overline{O}\overline{P} &= x\breve{i} + y\breve{j} \\ \overline{O}\overline{P_1} &= x_1\breve{i} + y_1\breve{j} \qquad (1) \\ \vec{a} &= a_1\breve{i} + a_2\breve{j} \end{aligned}$$



Como el vector $\overline{P_1}\overline{P}$ es paralelo al vector $\vec{a}$ podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$\overline{P_1}\overline{P} = \lambda\vec{a} = \lambda\left(a_1\breve{i} + a_2\breve{j}\right)$$

siendo λ un escalar, denominado **PARÁMETRO**. Por lo tanto, teniendo en cuenta la figura anterior obtenemos **LA ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA.**

$$\overline{O}\overline{P} = \overline{O}\overline{P_1} + \lambda\vec{a} \qquad (2)$$

utilizando las expresiones (1):

$$\left(x\breve{i} + y\breve{j}\right) = \left(x_1\breve{i} + y_1\breve{j}\right) + \lambda\left(a_1\breve{i} + a_2\breve{j}\right)$$

eliminando paréntesis y agrupando:

$$x\breve{i} + y\breve{j} = x_1\breve{i} + y_1\breve{j} + \lambda a_1\breve{i} + \lambda a_2\breve{j}$$
$$x\breve{i} + y\breve{j} = (x_1 + \lambda a_1)\breve{i} + (y_1 + \lambda a_2)\breve{j}$$

de donde resultan las siguientes igualdades:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda a_2 \end{cases}$$

que reciben el nombre de **ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA.** En estas ecuaciones el parámetro λ funciona como una variable auxiliar tal que, modificando su valor, podemos obtener la posición de distintos puntos sobre la recta.

Despejando el valor del parámetro en las expresiones anteriores se obtiene:

$$(4) \qquad \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \lambda$$

que se denomina **ECUACIÓN CARTESIANA SIMÉTRICA DE LA RECTA**

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y cartesiana simétrica de la recta, que pasa por el punto P_1 (2,-3) y es paralela al vector $\vec{a} = 4\breve{i} - \breve{j}$

La ecuación vectorial de la recta será:

$$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \lambda\vec{a}$$

reemplazando valores resulta:

$$x\breve{i} + y\breve{j} = (2\breve{i} - 3\breve{j}) + \lambda(4\breve{i} - \breve{j})$$
$$x\breve{i} + y\breve{j} = (2 + 4\lambda)\breve{i} - (3 + \lambda)\breve{j}$$

obteniéndose, de la igualdad anterior, las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = -3 - 1\lambda \end{cases}$$

y despejando el valor del parámetro se obtiene la ecuación cartesiana simétrica de la recta buscada:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{-1} = \lambda$$ λ puede no escribirse

FORMA IMPLÍCITA O ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA.

Consideremos la ecuación cartesiana simétrica de la recta dada por la expresión (4)

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}= \qquad (4)$$

operando resulta:

$$a_2(x-x_1)=a_1(y-y_1)$$
$$a_2x-a_2x_1=a_1y-a_1y_1$$

pasando todos los términos al primer miembro se obtiene:

$$a_2x-a_1y-a_2x_1+a_1y_1=0$$

y si llamamos:

$$a_2=A \qquad -a_1=B \qquad -a_2x_1+a_1y_1=C \qquad (5)$$

obtenemos la expresión:

A x + B y + C = 0 (6)

que se denomina **forma implícita o ecuación general de la recta en el plano.**

Podemos observar que se trata de una ecuación de dos variables x e y que se encuentran elevadas a la potencia uno.

Posiciones particulares de una recta.

1) <u>Ecuación de una recta paralela al eje de las ordenadas.</u>

Si en la expresión (6) hacemos

$$A\neq 0 \qquad B=0$$

resulta:

A x + C = 0

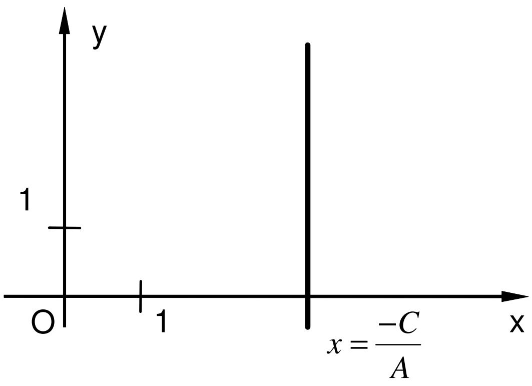
de la cual se obtiene:

$$x=\frac{-C}{A} \qquad (7)$$

Podemos interpretar esta última ecuación como

$$S=\left((x,y)/\,x=\frac{-C}{A}\right)$$

cuya representación gráfica en el plano xy es la siguiente



Como se puede ver, hemos obtenido el conjunto de puntos del plano, tales que cualquiera sea el valor de la ordenada y, la abscisa x es igual a una constante
(x =-C/A).
Este conjunto de puntos resulta alineado paralelamente al eje de las ordenadas Oy, de donde se deduce que la expresión (7) es la ECUACIÓN DE UNA RECTA PARALELA AL EJE DE LAS ORDENADAS.

2) <u>Forma explícita de la Ecuación de la recta</u>.

Si en la ecuación A x + B y + C = 0 es B ≠ 0 resulta

$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

y si llamamos:

$$-\frac{A}{B} = m \qquad\qquad -\frac{C}{B} = n$$

obtenemos:

$$\mathbf{y = m\,x + n} \qquad (8)$$

que recibe el nombre de **FORMA EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA EN EL PLANO.**

Si en la expresión (8) hacemos **x = 0** obtenemos: **y = n**
donde **n** *(valor que toma la ordenada cuando la abscisa vale cero)* recibe el nombre de ordenada en el origen.

Si es ahora **n = 0**, la recta pasa por el origen O(0,0) del sistema de referencia. En este caso, teniendo en cuenta las expresiones (8) y (5) resulta para **m**

$$m = \frac{y}{x} = \frac{-A}{B} = \frac{-a_2}{-a_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

Si denominamos con ϕ al ángulo que el eje de las abscisas forma con la recta r tomando como sentido positivo el sentido trigonométrico o antihorario resulta:

$$tg\phi = \frac{a_2}{a_1} = m$$

donde **m** se denomina **PENDIENTE DE LA RECTA**.

Cuando la recta es paralela al eje de abscisas, tg ϕ = 0.

Recordamos que la inclinación de una recta es un ángulo (ϕ) y la pendiente de la misma es la tangente trigonométrica de dicho ángulo (m = tg ϕ).

La inclinación de una recta varía entre 0º y 180º; pero debemos tener presente que si la recta es paralela al eje **y** resulta $\phi = ½\,\pi = 90º$, y la tg ½ π <u>NO EXISTE;</u> en consecuencia, en este caso particular, no existe valor para la pendiente.

<u>**Ejemplo:**</u>

Dada la ecuación de la recta $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ hallar su ecuación explícita, su pendiente, su inclinación y su ordenada en el origen. Representar gráficamente.

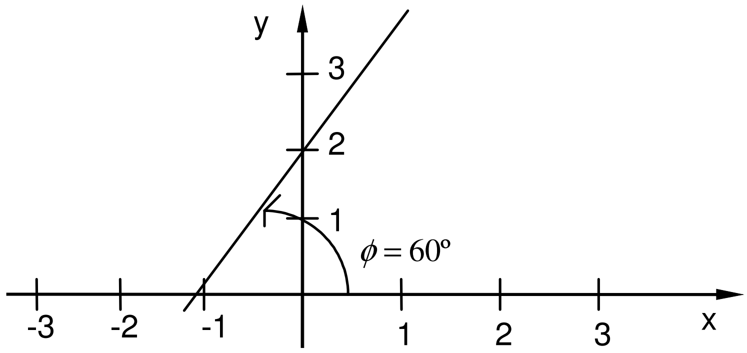
$$r \equiv \sqrt{3}x - y + 2 = 0$$

Despejando el valor de la variable y se obtiene la ecuación explícita de la recta:

$$y = \sqrt{3}x + 2$$

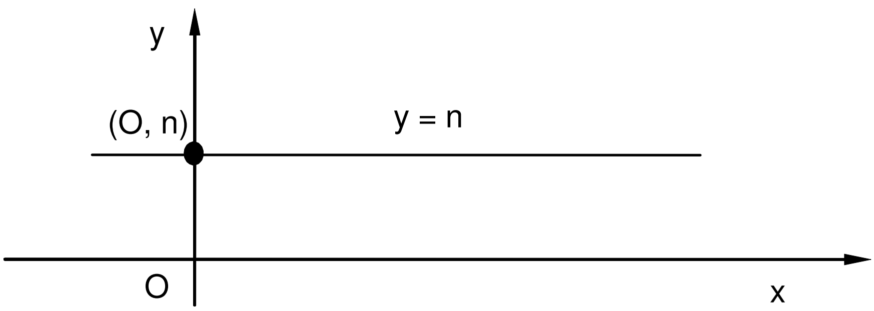
siendo: $m = tg\phi = \sqrt{3}$ $\quad \phi = arctg\sqrt{3} \Rightarrow \phi = 60^\circ$

n = 2 ordenada en el origen A (0,2).

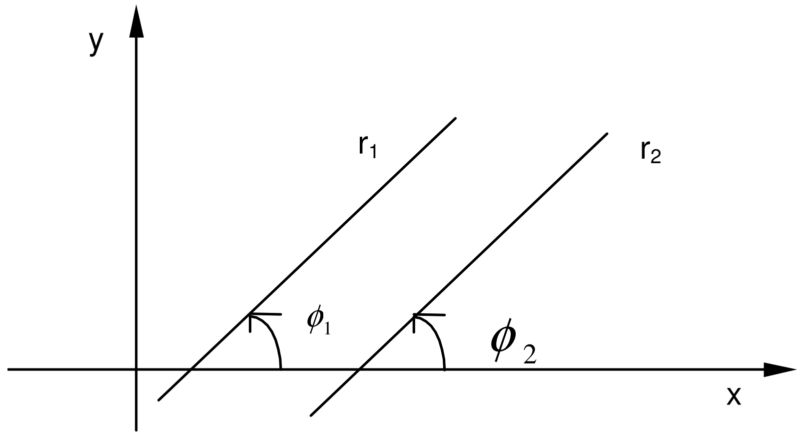


3) <u>Ecuación de la recta paralela al eje de las abscisas</u>.

Si en la forma explícita hacemos m = 0 resulta: **y = n;** cualquiera sea el valor asignado a la variable **x** , **y** es siempre igual a una constante **n**; es la llamada **FUNCION CONSTANTE** y su gráfica es una recta paralela al eje x.



CONDICION DE PARALELISMO ENTRE RECTAS.



Dadas dos rectas paralelas r_1 y r_2 de ecuaciones explícitas

$$y = m_1 x + n_1$$

$$y = m_2 x + n_2$$

por ser paralelas, tienen igual inclinación, es decir:

$$\phi_1 = \phi_2$$

de donde resulta:

$$tg\phi_1 = tg\phi_2 \qquad \Rightarrow \qquad m_1 = m_2$$

que nos da la condición de paralelismo entre dos rectas.

Actividad:

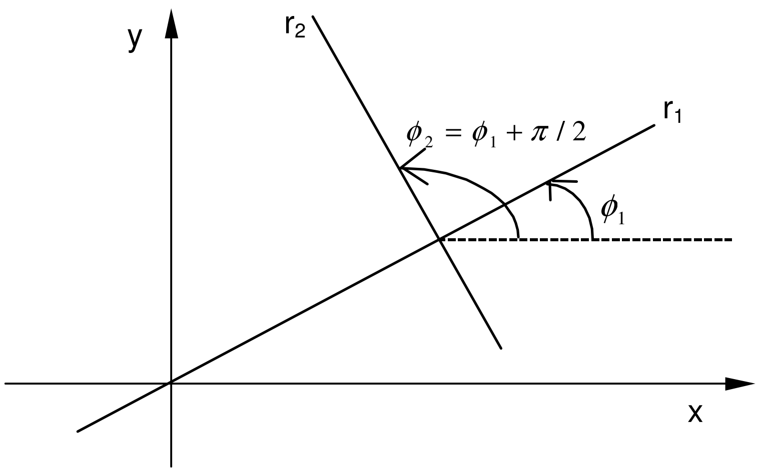
Dadas las rectas:

$$r_1 : 3x - 2y + 4 = 0$$
$$r_2 : 2\ y = 3x + 8$$

verificar que son paralelas.

CONDICION DE PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS.

Sean r_1 y r_2 dos rectas perpendiculares, cuyas ecuaciones explícitas son:



$$r_1 : y = m_1 x + n_1$$
$$r_2 : y = m_2 x + n_2$$

Sean ϕ_1 y ϕ_2 las inclinaciones de dichas rectas; de acuerdo a la figura resulta:

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2}$$

por lo tanto siendo:

$$m_2 = tg\phi_2 = tg\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$m_2 = \frac{sen\phi_1 \bullet \cos\frac{\pi}{2} + \cos\phi_1 \bullet sen\frac{\pi}{2}}{\cos\phi_1 \bullet \cos\frac{\pi}{2} - sen\phi_1 \bullet sen\frac{\pi}{2}}$$

y teniendo en cuenta que

$$sen\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

la expresión anterior se reduce a:

$$m_2 = \frac{\cos\phi_1}{-sen\phi_1} = -\cot g\,\phi_1 \quad = -\frac{1}{tg\phi_1} = -\frac{1}{m_1}$$

que es la condición de perpendicularidad buscada:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad o\ bien \quad m_2 \bullet m_1 = -1$$

<u>Ejemplo:</u>

Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv y = -\frac{5}{2}x + 1$$

$$r_2 \equiv y = \frac{2}{5}x - 4$$

verificar si son perpendiculares.

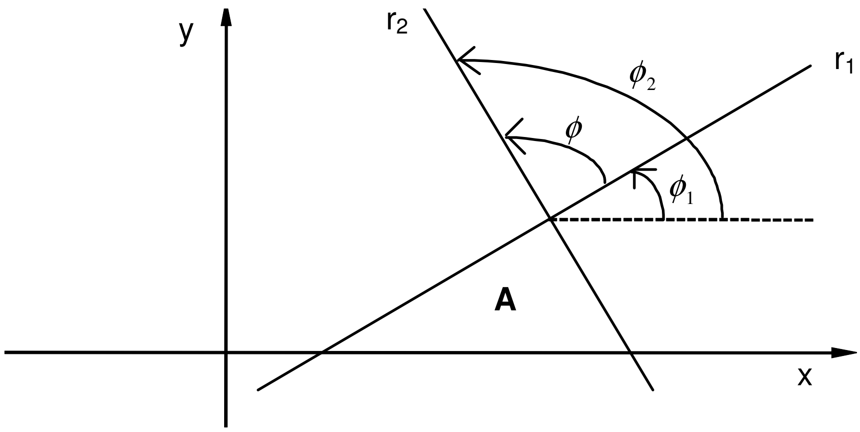
Siendo $m_1 = -\frac{5}{2}$ $\quad y \quad$ $m_2 = \frac{2}{5}$ resulta: $m_1 \bullet m_2 = -\frac{5}{2} \bullet \frac{2}{5} = -1$

de donde se deduce que:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

y en consecuencia las rectas r_1 y r_2 son perpendiculares.

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS.



Trataremos de encontrar una expresión que nos permita calcular el ángulo que forman dos rectas al cortarse en un punto.

Sean r_1 y r_2 dos rectas que se cortan en el punto A y cuyas pendientes sean respectivamente m_1 y m_2.

De acuerdo a la figura el ángulo que forman las rectas r_1 y r_2 es: $\phi = \phi_2 - \phi_1$

Resultando, de utilizar la expresión que permite calcular la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$tg\phi = tg(\phi_2 - \phi_1) = \frac{tg\phi_2 - tg\phi_1}{1 + tg\phi_1 \bullet tg\phi_2}$$

Pero, siendo

$$tg\phi_1 = m_1 \qquad tg\phi_2 = m_2$$

$$tg\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \bullet m_2}$$

En realidad, dos rectas se cortan según dos ángulos que son suplementarios. En estas condiciones, la tangente de ϕ puede ser positiva o negativa, según se trate de un ángulo del primer o del segundo cuadrante.

Podemos convenir en considerar únicamente los valores positivos; en estas condiciones la expresión anterior se transforma en:

$$tg\phi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \bullet m_2} \right|$$

Ejemplo:

Hallar el ángulo que forman al cortarse las rectas r_1 de ecuación $3x+2y-8=0$ y r_2 de ecuación $4x-2y+1=0$

Debemos hallar las pendientes m_1 y m_2 de las rectas r_1 y r_2 respectivamente, para lo cual debemos escribir sus ecuaciones en forma explícita.

$$r_1 \equiv 3x+2y-8=0 \quad \Rightarrow \quad 2y=-3x+8 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{3}{2}x+4$$

$$r_2 \equiv 4x-2y+1=0 \quad \Rightarrow \quad 2y=4x+1 \quad \Rightarrow \quad y=2x+\frac{1}{2}$$

siendo: $m_1=-\dfrac{3}{2}$ $\qquad m_2=2$

y reemplazando valores en la expresión

$$tg\phi=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1\bullet m_2}\right|=\left|\frac{2-(-3/2)}{1+(-3/2)\bullet 2}\right|=\left|\frac{2+3/2}{1-3}\right|$$

$$tg\phi=\left|\frac{7/2}{-2}\right|=\left|-\frac{7}{4}\right|=1{,}75$$

ϕ = arctg 1,75 = 60° 15’

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO.

Nos proponemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$ y tiene pendiente **m**. Para lograrlo podemos utilizar la expresión explícita de la recta:

$$\mathbf{y = m\,x + n} \qquad (a)$$

Teniendo en cuenta que la recta debe pasar por el punto $P_1(x_1,y_1)$, las coordenadas de este punto, deben satisfacer la ecuación de la recta, es decir, se cumple que:

$$y_1=mx_1+n \qquad (b)$$

si restamos miembro a miembro las expresiones (a) y (b) eliminamos n, obteniendo:

$$y-y_1=mx+n-mx_1-n$$
$$y-y_1=m\bullet(x-x_1) \qquad (c)$$

que es la ecuación buscada.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P_1 (3,4) y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Como la recta debe pasar por el punto P_1 (3,4) su expresión será:

$$y-4=m\bullet(x-3)$$

pero, como esta recta debe ser paralela a la bisectriz del primer cuadrante, su pendiente será m = 1 ya que:

$$m=tg\phi=tg45^{\circ}=1$$

Por lo tanto, la ecuación buscada resultará:

$$y-4=1\bullet(x-3) \qquad y=x-3+4=x+1$$

y = x + 1

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS.

En este caso tenemos como dato las coordenadas de dos puntos P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) y debemos hallar la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos.

Si la recta pasa por el punto P_1 (x_1,y_1) debe verificar la ecuación:

$$y-y_1=m\bullet(x-x_1) \qquad (a)$$

si pasa además por el punto P_2 (x_2,y_2) las coordenadas de dicho punto, deben satisfacer la ecuación de la recta, es decir

$$y_2-y_1=m\bullet(x_2-x_1) \qquad (b)$$

de la cual se obtiene el valor de la pendiente m, cuando conocemos dos puntos que le pertenecen, es decir:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (c)$$

Si reemplazamos el valor dado por la expresión (c) para **m** en la expresión (a) se obtiene:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bullet(x-x_1)$$

y pasando y_2 - y_1 al primer miembro obtenemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 (2,3) y P_2 (-3,-4).

Siendo: $\begin{array}{ll} x_1=2 & x_2=-3 \\ y_1=3 & y_2=-4 \end{array}$

reemplazando valores en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{y-3}{-4-3}=\frac{x-2}{-3-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{-7}=\frac{x-2}{-5}$$

$$\begin{aligned}
&-5\bullet(y-3)=-7\bullet(x-2)\\
&-5y+15=-7x+14\\
&-5y=-7x+14-15\\
&-5y=-7x-1\\
&y=\frac{-7x-1}{-5}\\
&y=\frac{7}{5}x-\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

que es la ecuación buscada.

FORMA SEGMENTARIA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA.

Sea la recta r, que no pasa por el origen O (0,0) del sistema coordenado, e intercepta a los ejes en los puntos P(p,0) y Q(0,q).
Para hallar la ecuación segmentaria de la recta, podemos partir de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

siendo, en este caso particular:

$$x_1=p \qquad x_2=0$$
$$y_1=0 \qquad y_2=q$$

con lo que resulta:

$$\frac{y-0}{q-0}=\frac{x-p}{0-p}$$

efectuando operaciones se obtiene:

$$\frac{y}{q}=-\frac{x}{p}+1$$

pasando $-\frac{x}{p}$ al primer miembro de la ecuación obtenemos:

$$\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1} \qquad \text{(I)}$$

que se denomina **ECUACION SEGMENTARIA DE LA RECTA** por ser p y q respectivamente la longitud de los segmentos bajo los cuales la recta corta a los ejes de abscisas y de ordenadas.

Ejemplo:

Dada la ecuación de la recta en la forma implícita $3x-y+8=0$ pasar a la forma segmentaria.

Pasando el término independiente al segundo miembro de la ecuación, se obtiene:

$$3x-y=-8$$

dividiendo ambos miembros por -8, nos queda:

$$\frac{3x}{-8}-\frac{y}{-8}=1 \qquad \frac{x}{-8/3}+\frac{y}{8}=1$$

comparando con la expresión (I) resulta:

$$p=-8/3 \qquad q=8$$

En estas condiciones, los puntos de intersección con los ejes coordenados **x** e **y** son respectivamente:

P(-8/3 , 0) y Q(0 , 8)

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS.

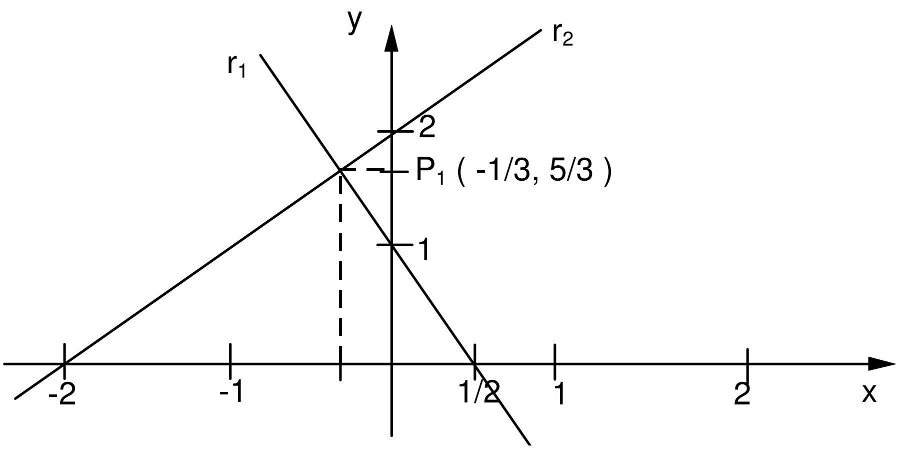
Sea el problema de resolver la intersección entre las rectas que conforman, desde el punto de vista algebraico el SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS (1), (2):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2=0 & (2) \end{cases}$$

Geométricamente equivale a determinar el punto de intersección de las dos rectas cuyas ecuaciones analíticas están dadas por las expresiones (1) y (2).

<u>**Ejemplo**</u>: Resolver grafica y analíticamente el sistema

$$\begin{cases} r_1 \equiv 2x+y-1=0 & (3) \\ r_2 \equiv x-y+2=0 & (4) \end{cases}$$



Para resolver este sistema analíticamente procedemos de la siguiente manera: despejamos y de la expresión (3) obteniendo

$$y = -2x + 1 \qquad (5)$$

y reemplazamos su valor en la expresión (4) obteniendo

$$x - (-2x + 1) = 0$$
$$x + 2x - 1 = 0$$
$$3x + 1 = 0$$
$$x = -1/3 \qquad (6)$$

De esta manera, hemos hallado el valor de **x** que reemplazado en la expresión (5) nos permite hallar el valor de **y**:.

$$y = -2x + 1 = -2(-1/3) + 1 = 2/3 + 1$$
$$y = \frac{2+3}{3} \qquad y = \frac{5}{3}$$

Por lo tanto, el punto de intersección de las dos rectas, o sea, LA SOLUCION ANALITICA DEL SISTEMA PROPUESTO es el punto:

$$P_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Siendo este punto, el ÚNICO PUNTO DEL PLANO **xy** que pertenece a ambas rectas, lo cual implica que dicho punto es LA ÚNICA SOLUCION DEL SISTEMA DADO.

Para verificar que el resultado obtenido es correcto, podemos reemplazar las coordenadas del punto en las ecuaciones dadas (3) y (4), comprobando si obtenemos una igualdad numérica.

En efecto, reemplazando valores en la expresión (3) se obtiene:

$$2\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{3}-1=0 \qquad -\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-1=0$$

$$\frac{-2-3}{3}+\frac{5}{3}=0 \qquad -\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=0 \qquad 0=0$$

Para la segunda ecuación (4) resulta:

$$-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+2=0 \qquad -\frac{6}{3}+2=0$$

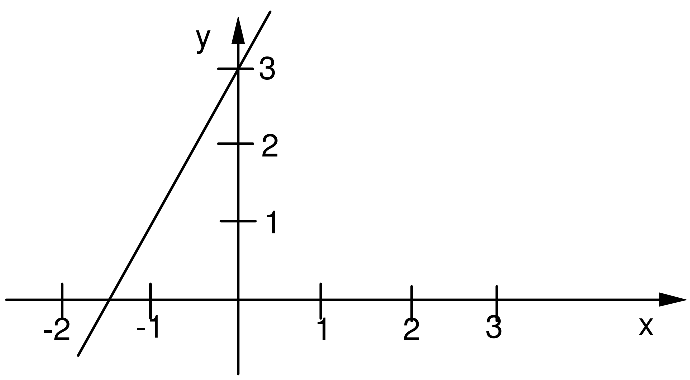
$$-2+2=0 \qquad 0=0$$

Luego, las coordenadas del punto $P_1\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ satisfacen a las ecuaciones dadas.

- Sea ahora el sistema:

$$r_1 \equiv -2x+y-3=0 \qquad (7)$$
$$r_2 \equiv -4x+2y-6=0 \qquad (8)$$

En este caso, observemos que la ecuación (8) se ha obtenido multiplicando todos los términos de la ecuación (7) por el escalar 2, resultando para ambas ecuaciones, la misma representación gráfica, es decir la misma recta.



Como se puede ver, las soluciones del sistema son los infinitos puntos de la recta.

Para resolver analíticamente el sistema dado procedemos de la siguiente manera: despejamos de la expresión (7) el valor de la variable obteniendo:

$$y = 2x + 3 \qquad (9)$$

reemplazando este valor en la expresión (8)

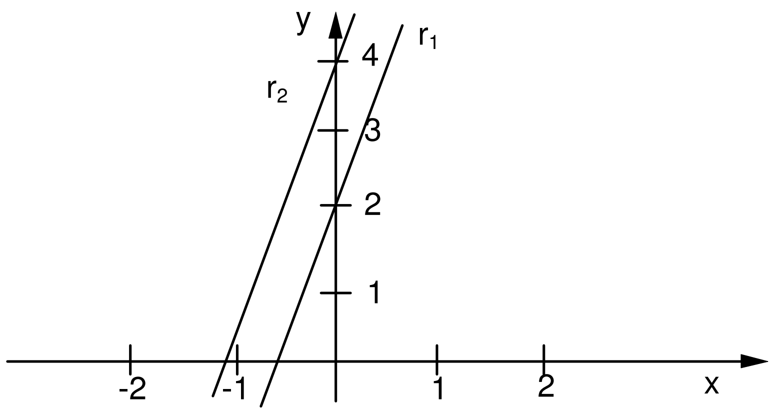
$$-4x + 2 \bullet (2x + 3) - 6 = 0$$
$$-4x + 4x + 6 - 6 = 0$$
$$x \bullet (-4 + 4) + (6 - 6) = 0$$
$$0x + 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Como se puede ver, cualquier punto de la recta es solución del sistema dado. Por lo tanto existen infinitas soluciones.

- Sea por último el sistema:

$$r_1 \equiv -3x + y - 2 = 0 \qquad (10)$$
$$r_2 \equiv -3x + y - 4 = 0 \qquad (11)$$

cuya representación gráfica es la siguiente:



Como puede apreciarse, las dos rectas r_1 y r_2 son paralelas (tienen la misma pendiente y distinta ordenada al origen) y en consecuencia NO EXISTE NINGÚN PUNTO DEL PLANO QUE SATISFAGA AL SISTEMA DADO.

TRABAJO PRACTICO.

Ejercicio Nº 1: Escribir la ecuación de la recta que pasa por el origen O (0,0) y tiene una inclinación de :

a) 0º.

b) 45º.

c) 90º.

d) 135º.

e) 225º.

f) 270º.

g) 315º.

Representar gráficamente.

Ejercicio Nº 2: ¿Cuáles de las ecuaciones de cada item corresponden a la misma recta?

a) $y = \frac{1}{2}x - 2$
$2x - y - 4 = 0$

b) $y = \frac{3}{4}x - 3$
$4y - 3x - 5 = 0$

c) $y = 2x$
$2y + x = 0$

d) $y = \frac{2}{3}x - 1$
$2x - 3y + 2 = 0$

e) $y = \frac{3}{4}x - 1$
$3y + 4x + 6 = 0$

f) $y = \frac{2}{3}x + 8$
$3x + 2y + 1 = 0$

Ejercicio Nº 3: Calcular en ángulo que determinar las rectas al cortarse y representar gráficamente:

a) $y = x$
$y + x = 0$

b) $y = \frac{3}{2}x + 1$
$x + 4y + 8 = 0$

Ejercicio Nº 4: Encontrar la ecuación de la recta que:

a) pasa por el punto A (5, -3) y es paralela a la recta 4x - 6y + 1 =0.
b) pasa por el origen O (0 , 0) y es paralela a la recta -3x + 2y - 1 =0.
c) pasa por el punto A (-1, 1) y es perpendicular a la recta y - x =0.
d) pasa por el punto A (3, 5) y es perpendicular a la recta y - x -1=0.
Representar gráficamente los casos planteados.

Ejercicio Nº 5: Encontrar la ecuación de la recta mediatriz del segmento determinado por los puntos:

a) A (-1,2) ; B (2, 3). Representar gráficamente.

b) A (5, -2) ; B (-1, 2). Representar gráficamente.

Ejercicio Nº 6:

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (-1,1) ; B (3,-2).

b) Idem para A (5,1) ; B (-4,5).

Ejercicio Nº 7:

a) Hallar la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y cartesianas simétricas de la recta que pasa por el punto P_1 (2,3) y es paralela al vector $\vec{v} = 2\breve{i} - \breve{j}$. Representar gráficamente.

b) Idem anterior que pasa por P_1 (-2,-2) y es paralela al vector $\vec{v} = \breve{i} - \breve{j}$. Representar gráficamente.

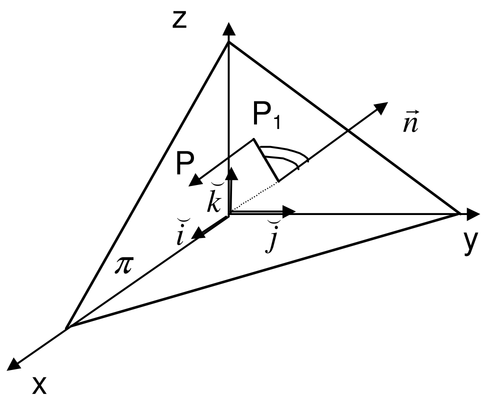
Ejercicio Nº 8: Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $y = x - 2;$ $x - 2 = 0$ y es perpendicular a la recta $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$. Representar gráficamente.

LA ECUACION DEL PLANO.

Ecuación vectorial y cartesiana del plano.

Sea un plano π ; P_1 (x_1,y_1 z_1) un punto que le pertenece y $\vec{n} = n_1\breve{i} + n_2\breve{j} + n_3\breve{k}$ un vector normal a π.

Un punto P de π pertenecerá al plano si y sólo si conforma con P_1 un vector perpendicular a $\vec{n}$; ello implica que el producto escalar es nulo, o sea $P_1\vec{P} \bullet \vec{n} = 0$ expresión que indica la perpendicularidad entre los vectores.
Siendo:



$$P_1\vec{P} = (x - x_1)\breve{i} + (y - y_1)\breve{j} + (z - z_1)\breve{k}$$

$\vec{n} = n_1\breve{i} + n_2\breve{j} + n_3\breve{k}$ resulta

$$(x - x_1)n_1 + (y - y_1)n_2 + (z - z_1)n_3 = 0$$

en la que haciendo

$$n_1 = A; \quad n_2 = B; \quad n_3 = C$$

obtenemos:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

que es la ecuación del plano que pasa por P_1 (x_1, y_1, z_1) en la cual A, B y C son las coordenadas del vector normal que conforma lo que se denomina *SISTEMA DE NUMEROS DIRECTORES DEL PLANO.*

Desarrollando la expresión anterior:

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$$

que escribimos por ser $Ax + By + Cz = cte = -D$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO.

FORMA SEGMENTARIA DE LA ECUACIÓN DEL PLANO.

Partiendo de la expresión de la ecuación general

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

y operando

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = \frac{-D}{-D} \qquad ; \qquad \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

con $\frac{-D}{A} = p \quad ; \quad \frac{-D}{B} = q \quad ; \quad \frac{-D}{C} = r \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

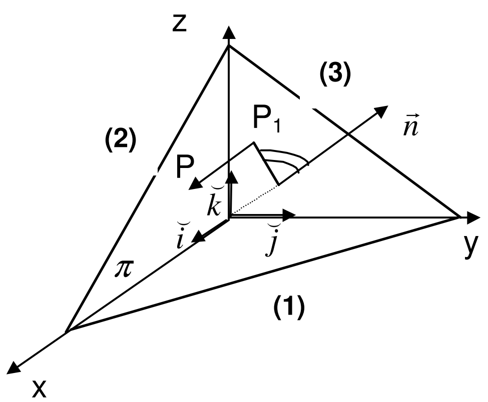
expresión en la cual p,q y r son las longitudes de los segmentos bajo los cuales el plano corta respectivamente a los ejes coordenados de abscisas, ordenadas y cotas.

TRAZAS SOBRE LOS PLANOS COORDENADOS.

Son las rectas intersecciones del plano π con los planos coordenados.
Para hallar su intersección con el plano xy observamos que en ella todos los puntos tienen nula la coordenada z (z=0) ; ello significa que si en la ecuación general hacemos z = 0 nos queda $Ax + By + D = 0$ (**CUIDADO**!: tiene el aspecto de la ecuación de una recta en el espacio bidimensional pero como veremos, en el espacio tridimensional, la ecuación así expresada **tiene un lugar geométrico distinto**).

En rigor en el espacio tridimensional las trazas se obtienen como intersección entre π y los planos coordenados cuyas ecuaciones son **z = 0 (plano xy)**; **y=0 (plano xz); x=0 (plano yz);** entonces las ecuaciones de las trazas son:

(1) $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

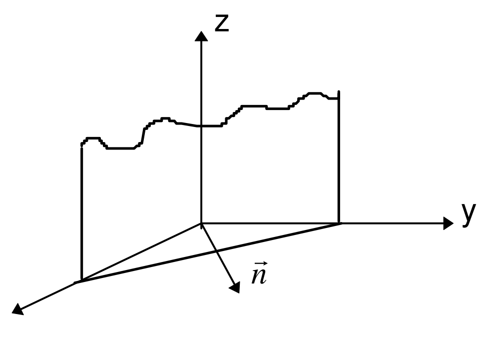


POSICIONES PARTICULARES DEL PLANO.

Sea la ecuación general del plano $Ax + By + Cz + D = 0$. Estudiamos las posiciones particulares que el plano adopta según que se anulen uno o más coeficientes de su ecuación:

- a) Si $D = 0$ la ecuación se transforma en $Ax + By + Cz = 0$ y se satisface para el origen de coordenadas; resulta entonces ser la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas.

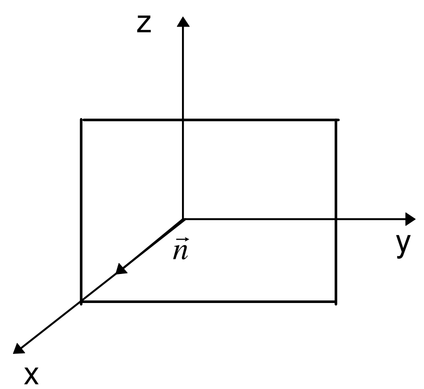
- b) Si cualquiera de los coeficientes de las variables es nulo, por ejemplo $C = 0$, obtenemos $Ax + By + D = 0$ resultando el vector normal $\vec{n} = (A, B, 0)$, es decir, con componentes solo en el plano xy; se concluye que siendo $\vec{n}$ normal al eje



z, el plano deberá ser paralelo a dicho eje.

Actividad: Dar las ecuaciones y dibujar los planos paralelos a los otros ejes coordenados.

- c) Sean ahora $C = B = 0$; la ecuación del plano resulta $Ax + D = 0$ en la $\vec{n} = (A, 0, 0)$ es paralelo al eje x y el plano se ubica paralelo al plano yz.

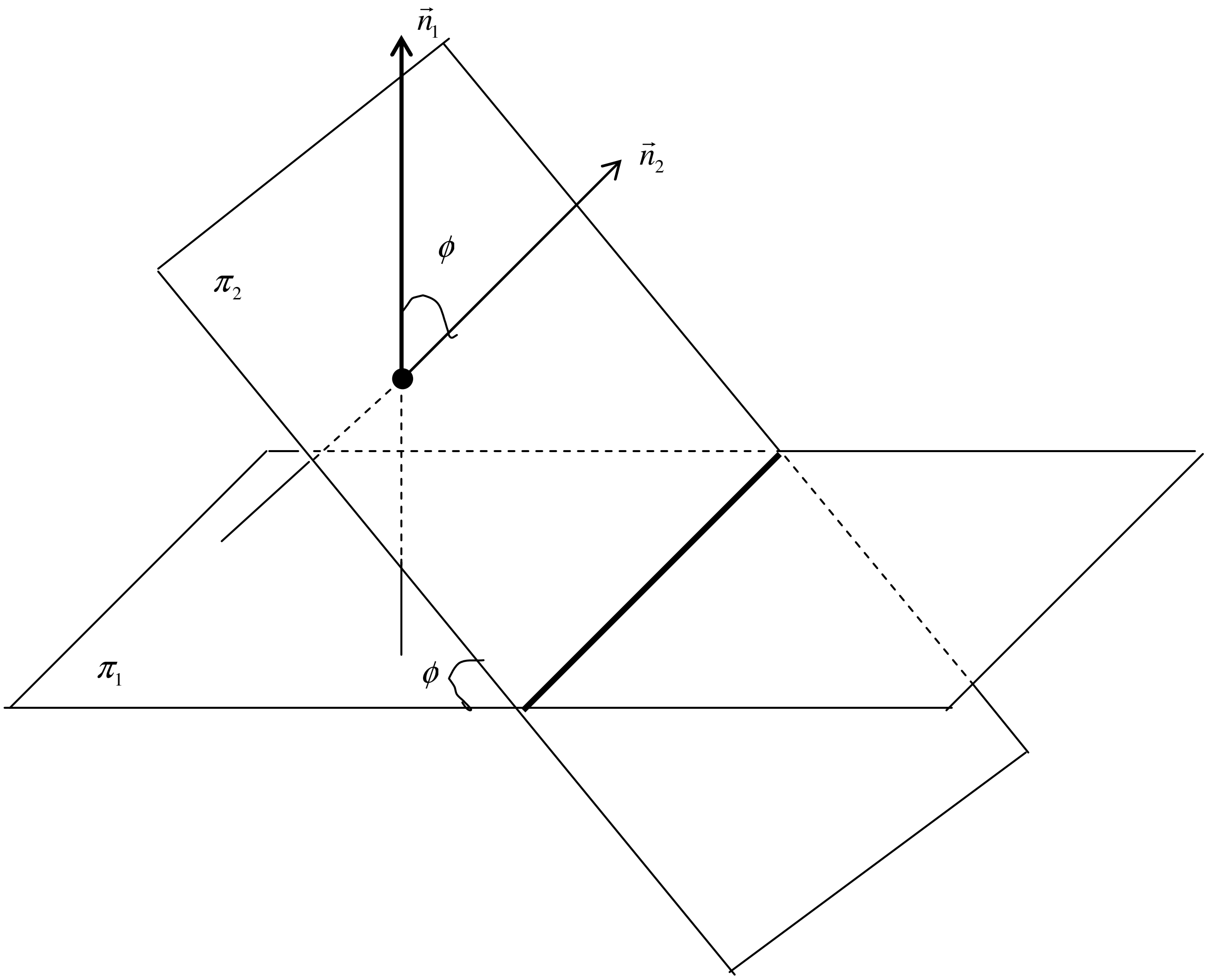


Actividad: Escribir las ecuaciones y dibujar los planos paralelos a los otros planos coordenados.

- d) Si $C = B = D = 0$ queda $Ax = 0$ o bien $x = 0$ ecuación del plano yz.

Actividad: Dar las ecuaciones de los otros planos coordenados.

ÁNGULO ENTRE PLANOS:



Siendo los vectores normales a los planos, el ángulo entre los planos puede obtenerse midiendo el ángulo entre los vectores,

Si $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad y \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ resulta:

$$\cos\phi = \frac{\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2}{|n_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \cdot \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}} \quad (1)$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO:

Si los planos son paralelos, sus vectores normales también lo serán; en consecuencia la condición de paralelismo entre planos resulta de la condición de paralelismo entre vectores.

Actividad: dar la expresión que permita verificar si dos planos son o no paralelos.

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD:

Si los planos son perpendiculares, ϕ = 90º $\Rightarrow$ cos ϕ= cos 90º = 0, resultando igual a cero el numerador de la expresión (1).

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 = \vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2$$

la condición de perpendicularidad, puede expresarse como **producto escalar nulo.**

TRABAJO PRÁCTICO.

Ejercicio Nº 1: Hallar la ecuación de un plano que pasa por $P_1(1,1,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = 3\breve{i} - 2\breve{j} + \breve{k}$.

Ejercicio Nº 2: Hallar la ecuación del plano paralelo al plano del ejercicio anterior que pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio Nº 3 : Escribir la ecuación del plano que pasa por $P(1,2,3)$ y resulta:

a) paralelo al plano **xy.**
b) paralelo al eje **z** y que pasa además por $Q(0,2,0)$

Ejercicio Nº 4: Escribir la ecuación de un plano paralelo al eje **x** que pasa por:

a) $P_1(0,2,0) \quad y \quad P_2(0,0,3)$
b) $P_1(1,2,3) \quad y \quad P_2(2,3,4)$

Ejercicio Nº 5: Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento $P_1(1,2,3)$, $P_2(3,4,5)$ en su punto medio.

Ejercicio Nº 6: Hallar el ángulo entre los planos:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 4 = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$