JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Las ecuaciones $3x - y = 0$ y $2x - y = 1$ de primer grado en dos variables pueden tener una o más raíces comunes y para encontrarlas, conformamos lo que se denomina un **SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS**, que se simboliza:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

El conjunto de pares (x , y) que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones se denomina **conjunto solución del sistema**. Cuando el conjunto solución es vacío el **SISTEMA** es **INCOMPATIBLE**. Si existe única solución (un solo par ordenado) el sistema se dice **COMPATIBLE DETERMINADO** y si, el conjunto solución está conformado por más de un par ordenado, el sistema se denomina **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Generalizando, entonces, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede adoptar el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Las ecuaciones (1) y (2), pueden expresarse en forma conjuntista:

$$S_1 = \{(x , y) / A_1 x + B_1 y + C_1 = 0\}$$

$$S_2 = \{(x , y) / A_2 x + B_2 y + C_2 = 0\}$$

En estas condiciones, **resolver el sistema de ecuaciones consiste en hallar $S_1 \cap S_2$, intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones (1) y (2);**

SOLUCION GRAFICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Como sabemos desde la escuela media, una ecuación lineal en dos variables representada en el espacio de dos dimensiones (el plano) tiene como lugar geométrico una recta.

Ejemplo 1:

Sea el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

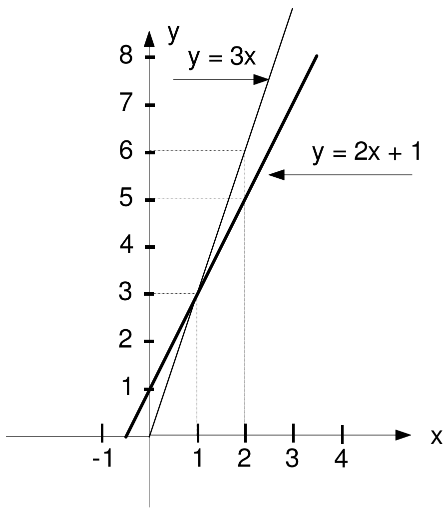
de (1) $3x - y = 0 \quad y = 3x$

de (2) $2x - y = -1 \quad y = 2x + 1$

cuya representación cartesiana es:

x	f(x)
1	3
2	6

x	f(x)
1	3
2	5



$S_1 = \{ (x,y) / 3x - y = 0 \}$

$S_2 = \{ (x,y) / 2x - y = -1 \}$ $\qquad S_1 \cap S_2 = \{(1,3)\}$

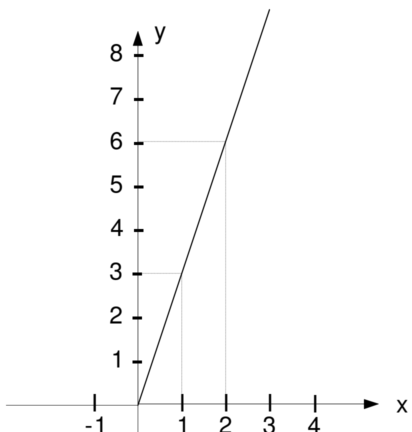
el conjunto solución del sistema $S_1 \cap S_2$ tiene un único par ordenado (las rectas se cortan en un punto) y por lo tanto el sistema resulta ser **COMPATIBLE DETERMINADO.**

Ejemplo 2:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 6x - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Si representamos gráficamente las rectas que corresponden a las ecuaciones (1) y (2).



JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

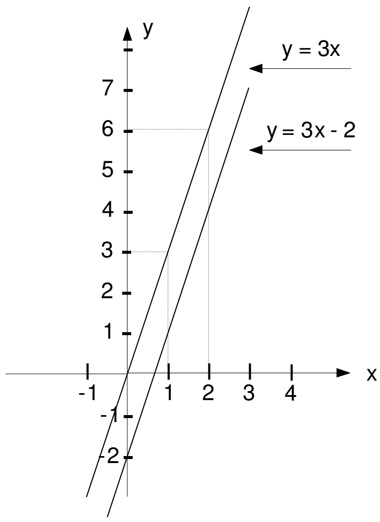
observamos que los lugares geométricos coinciden, razón por la cual el conjunto solución del sistema posee infinitos pares ordenados: los que corresponden a todos los puntos de cada una de las rectas; el sistema se dice, **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Ejemplo 3:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 3x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Representadas gráficamente las dos ecuaciones:



resultan rectas paralelas: no existe intersección, lo cual significa que el conjunto solución del sistema es vacío; por esta razón el sistema se dice **INCOMPATIBLE**.

RESOLUCION ANALITICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Para la resolución analítica de un sistema de ecuaciones lineales pueden utilizarse distintos métodos, algunos de ellos desarrollados en la escuela media: sustitución, igualación, sumas y restas, determinantes, razón por la cual de cada uno de ellos daremos sólo un ejemplo.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

a_1) se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones del sistema (de la ecuación (1) despejamos **y**).

$$y = 3x$$

a_2) **SUSTITUIMOS** la expresión hallada en la otra ecuación (en nuestro caso en la ecuación (2)).

$$2x - 3x = -1$$
$$-x + 1 = 0$$

a_3) Resolvemos la ecuación de primer grado con una incógnita, obteniendo:

$$x = 1$$

a_4) Hallamos el valor numérico de la expresión obtenida en a_1) para el valor hallado en a_3).

$$y = 3 \,.\, 1 = 3$$

La solución es el par ordenado: $(x, y) = (1,3)$

MÉTODO DE IGUALACIÓN.

Para el mismo ejemplo procedemos de la siguiente manera:

b_1) Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones (despejamos **y**)

de (1) $y = 3x$ (3)
de (2) $y = 2x + 1$ (4)

b_2) Igualamos los segundos miembros de (3) y (4)

$$3x = 2x + 1$$

$$3x - 2x = 1$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

obteniendo: $\boxed{x = 1}$

b_3) Hallamos el valor numérico de **y** en (3) o en (4) indistintamente para el valor de **x** obtenido en b_2)

$$y = 3 \,.\, 1$$

$$\boxed{y = 3}$$

METODO DE REDUCCION POR SUMAS Y RESTAS.

Volvamos al sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

El método que describiremos consiste conceptualmente en transformar el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en un sistema equivalente (que tenga el mismo conjunto solución) en el cual una de las ecuaciones tenga dos incógnitas y la otra sólo una.

En nuestro caso si queremos eliminar la incógnita **y** restamos (2) de (1)

restando m.a.m.

$$\begin{array}{rl} & 3x - y \;= 0 \\ - & \underline{2x - y \;= -1} \\ & x \;\;\;\;\;= 1 \qquad (3) \end{array}$$

resulta un sistema equivalente *(con el mismo conjunto solución)* conformado por una cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2) y la ecuación (3).

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & (1) \\ \quad x = 1 & (3) \end{cases}$$

La ecuación (3) es x = 1 y este valor se reemplaza en (1) para obtener:

$$y = 3$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

Si queremos ahora eliminar **x**, debemos multiplicar la ecuación (1) por el coeficiente de la incógnita **x** correspondiente a la ecuación (2); multiplicar la ecuación (2) por el coeficiente de la incógnita **x** correspondiente a la ecuación (1) y luego restar:

multiplicamos (1) por 2 : $2 \,.\, 3\,x - 2\,y = 0$

multiplicamos (2) por 3 : $3 \,.\, 2\,x - 3\,y = 3 \,.\, (-1)$

obteniendo:
$$\begin{array}{r} 6\,x - 2\,y = 0 \\ 6\,x - 3\,y = -3 \\ \hline y = 3 \end{array}$$
restando m.a.m.

y reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2) se llega a:

$$x = 1$$

METODO DE RESOLUCION POR DETERMINANTES.

Veamos como se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando determinantes; para ello daremos al sistema de ecuaciones el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

en el cual los coeficientes de las incógnitas poseen dos subíndices, el primero nos indica la ecuación en la que está ubicado el coeficiente y el segundo a que incógnita pertenece; así el coeficiente $\mathbf{a_{21}}$ está en la segunda ecuación y pertenece a la primera incógnita o sea a $\mathbf{x_1}$. Recordemos el método de reducción por sumas y restas: si queremos, por ejemplo, eliminar la incógnita $\mathbf{x_2}$ entre las ecuaciones (1) y (2) multiplicamos la ecuación (1) por $\mathbf{a_{22}}$, la ecuación (2) por $\mathbf{a_{12}}$, restando luego miembro a miembro:

multiplicando (1) por a_{22} : $a_{11}\,a_{22}\,x_1 + a_{12}\,a_{22}\,x_2 = b_1\,a_{22}$ (3)

multiplicando (2) por a_{12} : $a_{21}\,a_{12}\,x_1 + a_{22}\,a_{12}\,x_2 = b_2\,a_{12}$ (4)

restando m.a. m. : $(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 = b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}$ (5)

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

o sea:

$$x_1 = \frac{b_1\, a_{22} - a_{12}\, b_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}} \qquad (6)$$

que de acuerdo a la definición de determinantes puede escribirse (verificar):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (7)$$

Con similar razonamiento, multiplicando (1) por a_{21} y (2) por a_{11} y luego restando (8) de (9), obtenemos:

$$\begin{array}{lr} a_{11}\, a_{21}\, x_1 + a_{12}\, a_{21}\, x_2 = b_1\, a_{21} & (8) \\ a_{11}\, a_{21}\, x_1 + a_{11}\, a_{22}\, x_2 = b_2\, a_{11} & (9) \\ \hline (a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})\, x_2 = b_2\, a_{11} - a_{21}\, b_1 & (10) \end{array}$$

o sea:

$$x_2 = \frac{b_2\, a_{11} - a_{21}\, b_1}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}} \qquad (11)$$

que podemos escribir:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (12)$$

Observando las expresiones (7) y (12) podemos decir que cada una de las incógnitas puede obtenerse efectuando el cociente de dos determinantes: el determinante del denominador está formado por los coeficientes de las incógnitas, y el del numerador por el mismo determinante en el que se ha reemplazado la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se quiere calcular por los términos independientes.

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

Ejemplo:

Sea nuevamente el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 1}{3\,(-1) - (-1)\,2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3 - 0}{3\,(-1) - (-1)\,2} = 3$$

La solución es: $\boxed{x = 1 \quad y = 3}$

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS

En un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, la gráfica de cada una de ellas corresponde a un plano, los cuales podrán intersecarse en un punto, obteniendo una única solución para el sistema; podrán intersecarse a lo largo de una recta obteniendo infinitas solución para el sistema, o podrán no intersecarse o ser dos ellos paralelos, no obteniendo solución para el sistema,

RESOLUCION UTILIZANDO DETERMINANTES.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = b_3 \end{cases}$$

utilizamos el mismo concepto desarrollado para un sistema de dos ecuaciones: puede demostrarse que las incógnitas se obtienen de:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo: Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

El determinante conformado por los coeficientes de las incógnitas es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \quad \text{(ya calculado)}$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

entonces:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 8 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{5\,(-1+4)\ -\ (-1)\,(3+16)\ +1\,(-6-8)}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{2\,(3+16)\ -\ 5\,(-1+6)\ +1\,(8+9)}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{10} = \frac{2\,(8+6)\ -\ (-1)\,(8+9)\ +5\,(2-3)}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

La solución es: $\mathbf{x_1 = 2}$ $\mathbf{x_2 = 3}$ $\mathbf{x_3 = 4}$

METODO DE ELIMINACION GAUSSIANA.

Los métodos descriptos precedentemente resultan de sencilla aplicación e interpretación cuando el sistema que se trata de resolver es **compatible determinado**; no sucede lo mismo cuando el sistema es **indeterminado** o es **incompatible**. Como regla general puede utilizarse con ventaja sobre ellos el llamado **método de eliminación Gaussiana o método de eliminación de Gauss**; cuyo fundamento y disposición práctica se basa en la demostración ya efectuada para justificar el método de resolución por sumas y restas.

En efecto, retornando a las ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

operando con ellas habíamos llegado a la ecuación (10)

$$(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_2 = b_2\,a_{11} - a_{21}\,b_1 \qquad (10)$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \;=\; b_1 & (1) \\ (a_{11}\,a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}\,b_2 - b_1a_{21} & (10) \end{cases}$$

es equivalente al (1) , (2) ya que, como puede verificarse, tiene el mismo conjunto solución.

Hemos transformado mediante esta operación nuestro sistema original (1) , (2) constituido por dos ecuaciones con dos incógnitas en un nuevo sistema que le es equivalente y en el cual la segunda ecuación (10) posee una sola incógnita, por lo que, obtenida la misma, puede recurrirse a la ecuación (1) para calcular la restante.

Como en realidad, la operatoria se efectúa sobre los coeficientes, puede realizarse una disposición práctica para el cálculo:

1)	a_{11}	a_{12}	b_1	(1)
2)	a_{21}	a_{22}	b_2	(2)
3)	a_{11}	a_{12}	b_1	(1)
4)	$a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$		$a_{11}b_2$ - b_1a_{21}	(10)

Se escriben los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) incluso los términos independientes que se ubican a la derecha de una recta divisoria vertical; se traza una recta horizontal y debajo de ella se escriben los coeficientes del sistema modificado:

la fila 3) debe leerse: $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1$ (1)

la fila 4) $(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_2 = a_{11}\,b_2 - b_1\,a_{21}$ (10)

Ejemplo 1: Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3\,x - y = 0 \\ 2\,x - y = -1 \end{cases}$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

Escribimos:

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 0 & (1) \\ 2 & -1 & -1 & (2) \\ \hline 3 & -1 & 0 & (1) \\ 0 & -1 & -3 & (10) \end{array}$$

Desarrollo de (10): el cero que está debajo del coeficiente 3 de la ecuación (1) corresponde a que en la ecuación (10) no existe término en la incógnita x_1 ; debajo del coeficiente -1 de la incógnita x_2 de (1) **escribimos el transformado del coeficiente de x_2 de la (2)**

$$(a_{11}.\ a_{22}\ -\ a_{12}\ .\ a_{21}) = [\ 3\ (-1) - 2\ (-1)\ ] = -1$$

y debajo del término independiente de (1) **el transformado** del término independiente de 2):

$$a_{11}\ .\ b_2 - b_1\ .\ a_{21} = [\ 3\ (-1) - 0\ .\ 2\ ] = -\ 3$$

Prácticamente el cálculo es así: el transformado del coeficiente a_{22} de (2)

$$\begin{array}{cc|} 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ \hline 3 & -1 \\ & -1 \end{array}$$

se obtiene resolviendo el:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$$

y el transformado del término independiente de (2)

$$\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

se obtiene resolviendo el:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

El sistema equivalente resultante:

$$\begin{cases} 3\,x_1 - x_2 = 0 & (1) \\ \quad\; - x_2 = -3 & (10) \end{cases}$$

de donde:

$$\mathbf{x_2 = 3}$$

$$3\,x_1 - 3 = 0$$

$$\mathbf{x_1 = 1}$$

Como vemos existe única solución y el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO** (geométricamente las gráficas son rectas que se cortan en el punto)

$$(x_1\,,\,x_2) = (1\,,\,3)$$

Ejemplo 2:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3\,x - y = 2 \\ 6\,x - 2y = 4 \end{cases}$$

3	-1	2
6	-2	4
3	-1	2
0	0	0

el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 3\,x_1 - x_2 = 2 \\ \end{cases}$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

$$0.x_2 = 0$$

La ecuación $0.x_2 = 0$ se satisface para cualquier número razón por la cual el sistema tiene infinitas soluciones y se denomina **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Cada una las posibles soluciones se obtiene fijando un valor arbitrario para x_2 y obteniendo luego x_1 de la otra ecuación. (Geométricamente las gráficas coinciden).

Ejemplo 3:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3\,x_1 - x_2 = 2 \\ 3\,x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ \hline 3 & -1 & 2 \\ & 0 & 6 \end{array}$$

Siendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3\,x_1 - x_2 = 2 \\ 0.x_2 = 6 \end{cases}$$

La segunda ecuación de este sistema no tiene solución, ya que no existe número que multiplicado por cero de como resultado seis; el sistema es **INCOMPATIBLE** (en este caso las rectas son paralelas).

Como hemos visto en los ejemplos anteriores el método de eliminación Gaussiana no solo permite resolver con rapidez un sistema de ecuaciones sino además facilita **clasificar** el tipo de solución de cada caso particular.

Idéntico razonamiento se utiliza para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

Sea el sistema :

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = b_1 \quad (1) \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2 \quad (2)$$

$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3 \quad (3)$$

En este caso el método de eliminación gaussiana consiste en tomar cualquiera de las ecuaciones (*por ejemplo la (1)*) y eliminar la incógnita x_1 primero con la ecuación (2) y luego, independientemente, con la ecuación (3) transformando el sistema original en uno equivalente conformado por una ecuación con tres incógnitas y las otras con dos incógnitas.

De este nuevo sistema **se toman las ecuaciones que tienen dos incógnitas** y se lo transforma siguiendo el procedimiento ya descripto para los sistemas de orden dos, en otro sistema equivalente, que tenga una ecuación en con incógnitas y la otra solo con una.

Del resultado de esta última operación obtendremos un sistema equivalente al original, pero con la siguiente forma: la primera ecuación con tres incógnitas, la segunda con dos y la tercera con solo una lo que nos permite obtener, partiendo de esta última ecuación, el conjunto solución.

Ejemplo 1:

Sea el sistema (ya resuelto por determinantes)

$$\begin{cases} 2\, x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2\, x_3 = -3 \\ 3\, x_1 + 2\, x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Adoptando la disposición práctica descripta:

	2	-1	1	5
	1	1	-2	-3
	3	2	-1	8
repetimos la 1º ecuación.	2	-1	1	5
	0	3	-5	-11
	0	7	-5	1

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

repetimos la 1º y la 2º del paso anterior.	2	-1	1	5
	0	3	-5	-11
	0	0	20	80

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_2 - 5x_3 = -11 \\ 20x_3 = 80 \end{cases}$$

y se obtuvo resolviendo, por ejemplo, para el elemento **-5** que es el transformado de **-1** el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

de: $20x_3 = 80$ $\boxed{x_3 = 4}$

de: $3x_2 - 5 \cdot 4 = -11$

$3x_2 = 20 - 11$

$x_2 = 3$

y por último de: $2x_1 - 3 + 4 = 5$

$2x_1 = 5 + 3 - 4$

$\boxed{\mathbf{x_1 = 2}}$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{cccc|c}
3 & 5 & 11 & 7 \\
2 & 3 & 8 & 4 \\
1 & -1 & 9 & -3 \\
\hline
3 & 5 & 11 & 7 \\
0 & -1 & 2 & -2 \\
0 & -8 & 16 & -16 \\
\hline
2 & 5 & 11 & 7 \\
0 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

El sistema equivalente es:

$$
\begin{cases}
3\,x_1 + 5\,x_2 + 11\,x_3 = 7 \\
\quad - x_2 + 2\,x_3 = -2 \\
\quad 0.x_3 = 0
\end{cases}
$$

El sistema admite infinitas soluciones, que se obtienen dando valores arbitrarios a x_3 : por esa razón es **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Ejemplo 3:

$$
\begin{cases}
4\,x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\
-2\,x_1 - 4\,x_2 + 6\,x_3 = 5 \\
2\,x_1 + 4\,x_2 - 6\,x_3 = -2
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
4 & 1 & -1 & 6 \\
-2 & -4 & 6 & 5
\end{array}
$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

2	4	-6	-2
4	1	-1	6
0	-14	22	32
0	14	-22	-20
4	1	-1	6
0	-14	22	32
0	0	0	-168

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 4x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 6 \\ \quad -14x_2 + 22x_3 = 32 \\ \qquad 0x_3 = -168 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución ($0.x_3 = -168$) y por lo tanto se denomina **INCOMPATIBLE**.

SISTEMAS MIXTOS.

Con frecuencia se presenta el problema de hallar la o las intersecciones entre una parábola y una recta siendo para ello necesario construir un sistema de la forma:

$$\begin{cases} y = a\ x^2 + bx + c \qquad con\ \ a \neq 0 \\ y = mx + n \end{cases}$$

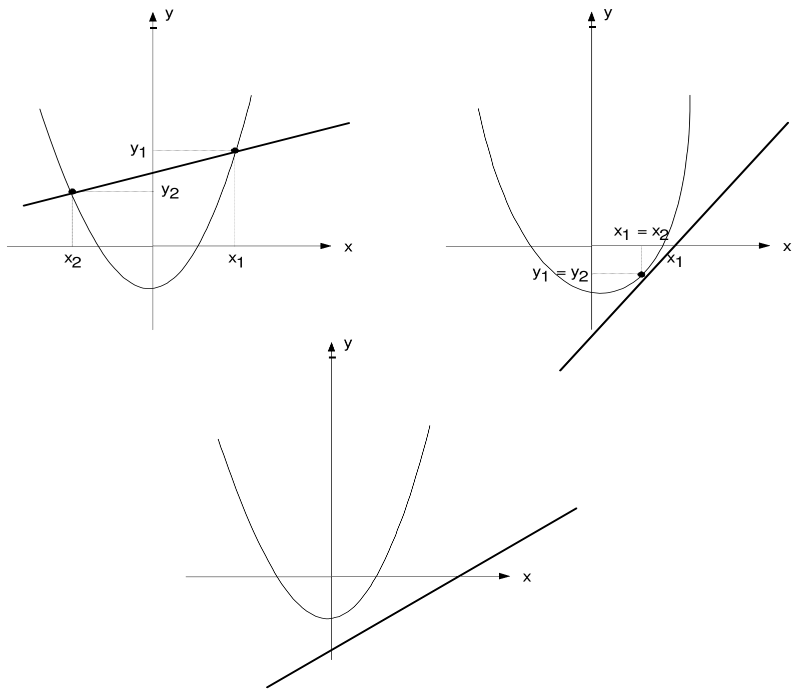
que se denomina **sistema mixto** por estar constituido por ecuaciones de distinto grado.

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

Resolver este sistema significa hallar el o los pares ordenados que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones, es decir, aquellos pares ordenados que corresponden a los puntos de intersección de la recta asociada a la función lineal (eventualmente la función constante) con la parábola asociada a la función cuadrática.

Ello significa que de acuerdo a la posición relativa entre los respectivos lugares geométricos pueden presentarse los siguientes casos:



Ejemplo 1:

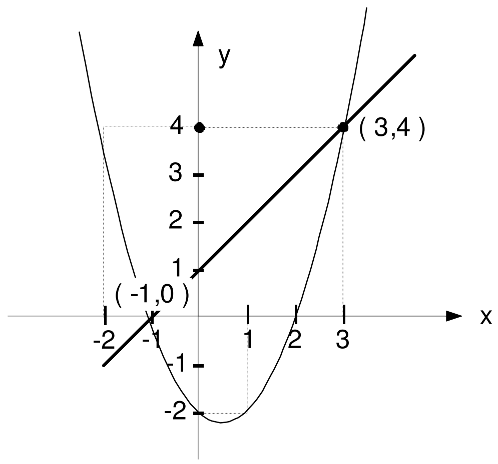
Sea el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 & (1) \\ y = x + 1 & (2) \end{cases}$$

Graficando:

x	$y = x^2 - x - 2$
-2	4
-1	0
0	-2
1	-2
2	0
3	4

x	$y = x + 1$
0	1
3	4



Analíticamente:

igualamos (1) y (2)

$$x^2 - x - 2 = x + 1$$

operando:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

obtenemos una ecuación de 2º grado de una incógnita cuya solución es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \qquad x = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

Con los valores de x_1 y x_2 hemos hallado las abscisas de los puntos de intersección; para encontrar las respectivas ordenadas reemplazamos dichos valores en la ecuación (2):

$$y_1 = x_1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$y_2 = x_2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Resultando los pares:

$$(x_1 , y_1) = (3 , 4)$$

$$(x_2 , y_2) = (-1 , 0)$$

$$y \quad S = \{ (3 , 4) ; (-1 , 0) \}$$

Ejemplo 2:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 & (1) \\ y = 3x - 6 & (2) \end{cases}$$

Igualando ambos miembros:

$$x^2 - x - 2 = 3x - 6$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\,1\,4}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

La ordenada del único punto de intersección se obtiene de:

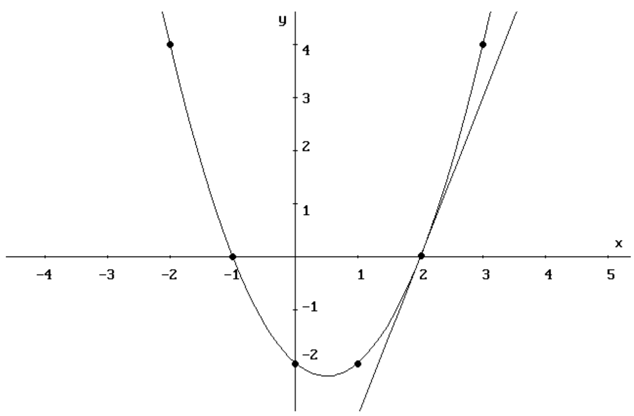
$$y = 3 \,.\, 2 - 6 = 0$$

resultando que el par ordenado (2 , 0) es una raíz doble; allí la recta es tangente a la parábola.

Graficando:

x	$y = x^2 - x - 2$
-2	4
-1	0
0	-2
1	-2
2	0
3	4

x	$y = 3x - 6$
0	-6
2	0



Ejemplo 3:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 & (1) \\ y = x - 4 & (2) \end{cases}$$

Igualando los segundos miembros:

$$x^2 - x - 2 = x - 4$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

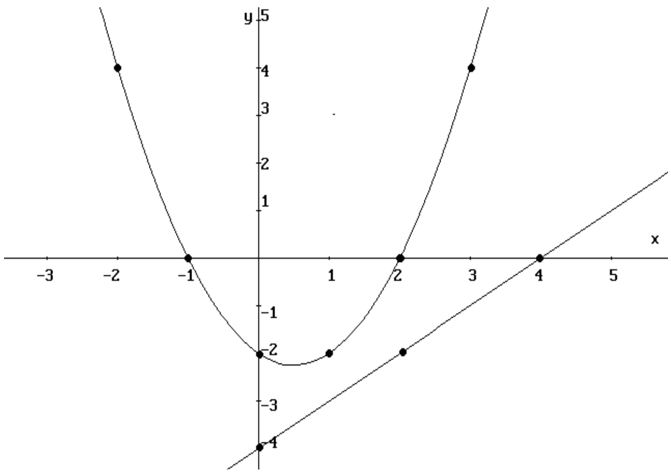
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\,1\,2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

no tiene solución: **las curvas no tienen ningún punto común.**

La representación cartesiana es:

x	$y = x^2 - x - 2$
-2	4
-1	0
0	-2
1	-2
2	0
3	4

x	$y = x - 4$
0	-4
2	-2



JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

INECUACIONES.

Se denomina inecuación a toda desigualdad algebraica que se satisface para ciertos valores de sus incógnitas.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.

Ejemplo 1:

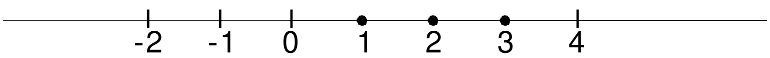
Sea el conjunto: $A = \{ x/x \in N \wedge x < 4 \}$

La expresión que permite encontrar los elementos del conjunto **N** que pertenecen al conjunto A es una inecuación de primer grado en una incógnita.

El conjunto solución es:

$$S = \{ 1 , 2, 3 \}$$

Gráficamente la solución se representa sobre la recta numérica:



Ejemplo 2:

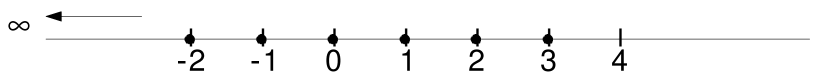
Sea el conjunto:

$$A = \{ x/x \in Z \wedge x < 4 \}$$

En este caso la inecuación $x < 4$ tiene como conjunto solución a:

$$S = \{ \ldots , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 \}$$

y gráficamente



Ejemplo 3:

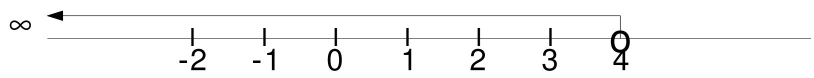
Sea ahora el conjunto:

$$A = \{ x/x \in R \wedge x < 4 \}$$

Cuando nuestro conjunto de referencia es el conjunto de los reales, la solución de la inecuación es el intervalo de longitud infinita

$$]-\infty , 4[= (-\infty, 4),$$

que puede representarse



INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS.

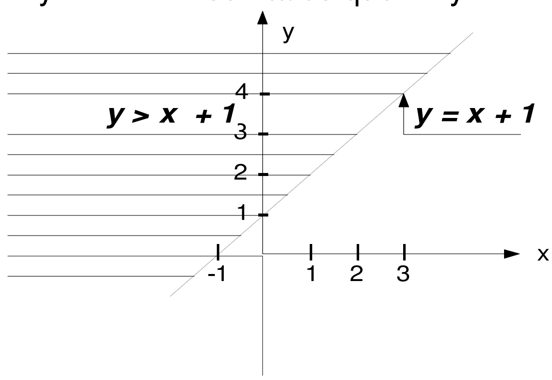
Si una inecuación está expresada en dos variables, la solución es un conjunto de pares ordenados del plano.

Sea el conjunto:

$$A = \{ (x,y) / x \in R \wedge y \in R \wedge y > x + 1 \}$$

Graficando $y = x + 1$; que representamos punteada; todos aquellos puntos que pertenecen al semiplano ubicado sobre $y = x + 1$ son tales que: $y > x + 1$

x	x + 1
0	1
1	2
2	3
3	4



La solución es entonces, el semiplano rayado, con exclusión de la recta $y = x + 1$ dibujada en línea de trazos. Por no tener borde o frontera decimos que se trata de un semiplano abierto.

Para identificar la región del plano que corresponde probamos las coordenadas de un punto cualquiera en la inecuación; por simplicidad en los cálculos elegimos el origen de coordenadas, y verificamos si sus coordenadas (0,0) la satisfacen:

De: $y > x+1$, resulta: $0 > 0+1$ desigualdad que **no** se satisface; en consecuencia el semiplano que corresponde a la solución no contiene al origen de coordenadas.

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

RESOLUCION GRAFICA DE SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS.

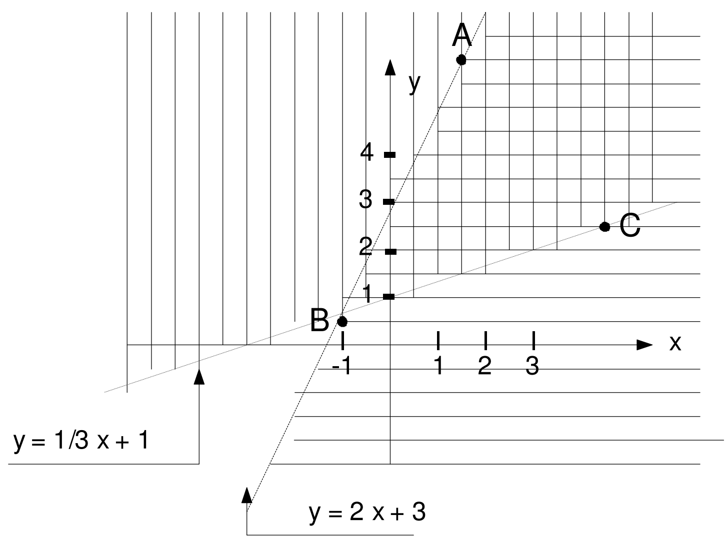
Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 > 0 & (1) \\ -3x + 9y - 9 > 0 & (2) \end{cases}$$

de (1) $2x + 3 > y \quad \Rightarrow \quad y < 2x + 3$

de (2) $9y > 3x + 9 \quad \Rightarrow \quad y > 1/3\, x + 1$



JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

El rayado horizontal corresponde a **$y < 2x + 3$**, semiplano limitado por la recta **$y = 2x + 3$,** cuyos puntos no le pertenecen y por esa razón se dibujan en línea de trazos.

Igualmente, el rayado vertical cubre el semiplano que verifica:

$y > 1/3\ x + 1$; con exclusión de la recta $y = 1/3\ x + 1$ dibujada por dicha razón en línea de trazos.

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones descriptas; dicho de otra forma, es el conjunto formado por todos los pares ordenados (x , y) ubicados dentro del ángulo ABC " doblemente rayado ".

TRABAJO PRÁCTICO
ECUACIONES E INECUACIONES

1.- Resolver:

1.a) $7x + 7 = 5x + 14$
1.b) $4x - 12 = 3x$
1.c) $8x + 5 = 26 - 6x$
1.d) $28 - 3x + 1 = 0$
1.e) $4(2 - x) - 8 = 0$
1.f) $100 - [16(x-1) - (10x - 2)] = 48$

2.- Resolver:

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

2.a) $\frac{x-1}{6}-\frac{2x-4}{5}=\frac{2-x+3}{2}$

2.b) $\frac{4x+6}{3}=\frac{6x-2}{5}$

2.c) $\frac{1}{3}\{2x-[-(x-3)]\}+2=1$

2.d) $\frac{x}{4}=\frac{x-3}{9}$

2.e) $(x-1)\bullet(x+3)=(6-x)\bullet(3-x)$

2.f) $(x-2)\bullet(2-x)=(1-x)\bullet(x-3)$

3.- Resolver:

3.a) $\frac{2-x}{3x}-\frac{1}{x}=\frac{4+5x}{3x}$

3.b) $\frac{2-x}{6x}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{12x}=\frac{1-2x^2}{3x}$

3.c) $\frac{5x-3}{4-x^2}=\frac{5+x}{2+x}\bullet\frac{x+3}{2-x}$

4.- 4.a) Qué número debe restarse de 8 para obtener el triplo de dicho número?

4.b) Hallar el número que verifica: si lo multiplicamos por tres, al producto le sumamos cinco y a la suma la dividimos por dos, obtenemos el mismo resultado que si lo multiplicamos por cinco, al producto le sumamos cuatro y a la suma la dividimos por tres.

4.c) La tercera parte de un número menos su duplo es igual a un quinto del mismo número menos 28. Cuál es el número?

4.d) Hallar un número tal que si le restamos su mitad, obtenemos el mismo resultado que si a la mitad de la unidad le restamos uno.

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

4.e) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que multiplicados entre sí dan como resultado 255

5.- Resolver los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, por los siguientes métodos:

1) Sustitución, 2) Igualación, 3) Sumas y Restas, 4) Determinantes, 5) Eliminación Gaussiana, 6) Gráfico.

$a)\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ -x+3y=5 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 3x+y=-4 \\ x=3 \end{cases}$

$d)\begin{cases} 4x-3y=5 \\ -8x+6y=-10 \end{cases}$ $e)\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ $f)\begin{cases} 5x-3y=7 \\ -10x+6y=-2 \end{cases}$

6.- Resolver por Determinantes y por eliminación Gaussiana.

$a)\begin{cases} 3x+2y+4z=19 \\ 2x+5y+3z=21 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-z=4 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ $c)\begin{cases} x+y=1/2 \\ x+z=1/3 \\ y+z=1/3 \end{cases}$

$d)\begin{cases} 2x+y-5z=8 \\ 3x-4y+z=4 \\ x+2y+3z=14 \end{cases}$ $e)\begin{cases} 2x-y+z=-3 \\ 3x-2y+5z=1 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$

7.- Resolver analítica y gráficamente.

7.a) $\begin{cases} y = x^2 - x - 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

JTP Ing. Viviana CAPPELLO
Tutores educación de distancia: Ing. Chong Arias – Ing. Cappello

---

7.b) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ x - y = 0 \end{cases}$

7.c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y - 4 = x\,(x - 2) \end{cases}$

8.- Resolver las siguientes inecuaciones. Graficar.

8.a) $x > 4 \ / \ x \in N$

8.b) $x < 4 \ / \ x \in N$

8.c) $x \leq 4 \ / \ x \in N$

8.d) $x < 1 \ / \ x \in N$

8.e) $y > x + 2 \ ; \ / \ x , y \in R$

8.f) $y \leq x + 1 \ ; \ / \ x , y \in R$

9.- Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones.

9.a) $\begin{cases} 3x - 2y + 1 > 0 \\ -x + y - 5 < 0 \end{cases}$

9.b) $\begin{cases} 4x - 3y > 5 \\ -8x + 6y + 10 < 0 \end{cases}$

9.c) $\begin{cases} 5x - 3y - 7 < 0 \\ -10x + 6y > -2 \end{cases}$