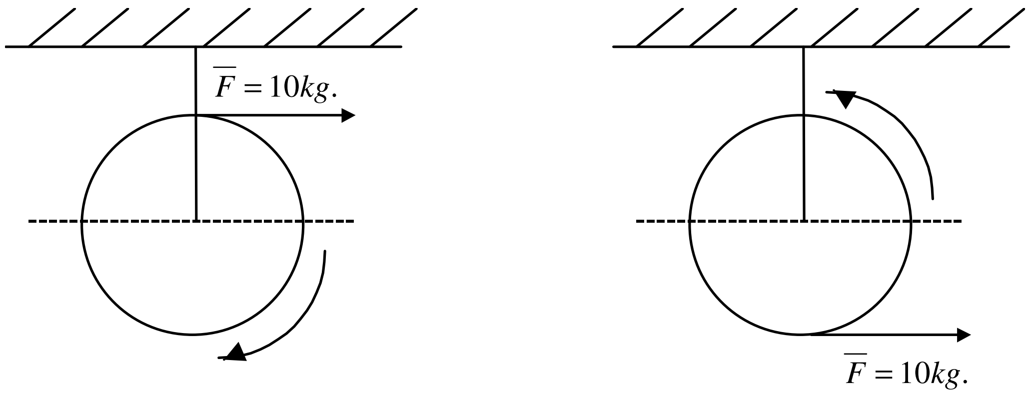
VECTORES

Ciertas magnitudes, que quedan perfectamente definidas por un solo número real (su medida o módulo) se denominan MAGNITUDES ESCALARES pudiendo representarse por segmentos tomados sobre una recta. Son magnitudes escalares, la longitud, la superficie, el volumen etc.

Existen otras magnitudes, para las cuales no resulta suficiente un número para su determinación. Por ejemplo, si queremos expresar que hemos aplicado sobre un cuerpo una fuerza de 10 $\overrightarrow{kg}$, no basta el número real 10 para identificarla; es necesario además indicar: DIRECCION, SENTIDO Y PUNTO DE APLICACION de la fuerza.

Una magnitud de las características de la descripta recibe el nombre de MAGNITUD VECTORIAL, y se representa geométricamente mediante un elemento que la simboliza denominado VECTOR FIJO (porque tiene un punto de aplicación).

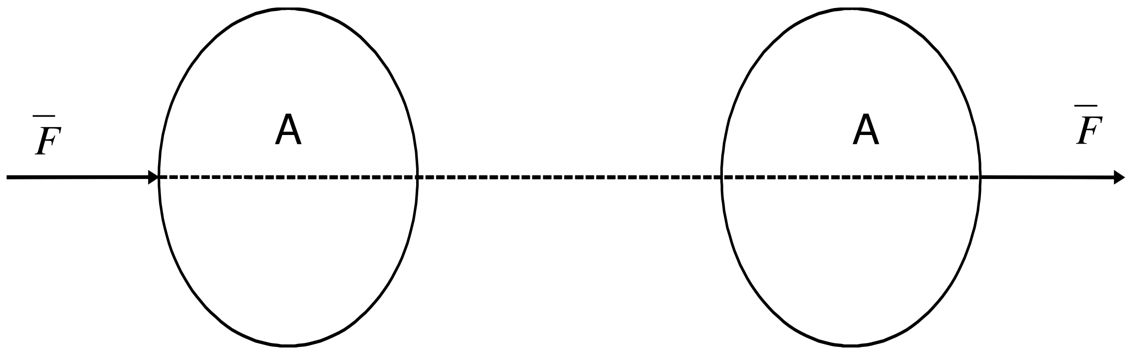
En el siguiente ejemplo, puede verse la diferencia de efectos, si para el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido cambiamos el punto de aplicación del vector.



Existen otros tipos de vectores:

a) Aquellos cuyo efecto resulta ser el mismo si actúan (con igual módulo, dirección y sentido) sobre la misma recta de acción y que se denominan VECTORES AXILES O DESLIZANTES. (Son los vectores que se utilizan en Estructuras para estudiar el equilibrio de los cuerpos rígidos)

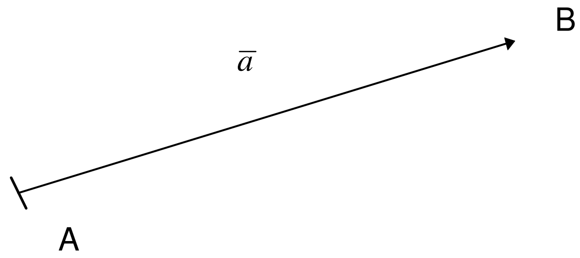
Cuando se aplica la fuerza $\vec{F}$ en el cuerpo rígido A el efecto **no varía** si la misma se ubica sobre la misma recta de acción.



b) Aquellos cuyo efecto resulta ser el mismo si actúan (con igual módulo, dirección y sentido) sobre cualquier posición de las infinitas rectas paralelas a una dirección prefijada. Estos vectores, que estudiaremos en el presente curso, reciben el nombre de VECTORES LIBRES.

Es decir que si dos vectores actúan sobre rectas paralelas y tienen el MISMO MODULO y el MISMO SENTIDO, diremos que son IGUALES, puesto que al ser sus rectas sostén paralelas, TIENEN LA MISMA DIRECCION.
Los vectores que cumplen con la condición precedente se denominan VECTORES EQUIPOLENTES.

En general, llamaremos vector a todo SEGMENTO ORIENTADO.
El punto A se denomina origen del vector y el punto B extremo del mismo.



La recta sostén del segmento $\overline{A}\overline{B}$ determina LA DIRECCION y la punta de la flecha, o sea, la orientación desde A hacia B determina EL SENTIDO DEL VECTOR . $\overline{A}\overline{B}$

Nomenclaremos los vectores:

$$\overline{a}, \quad \vec{a}, \quad \overline{A}\overline{B} \quad ó \quad A\vec{B}$$

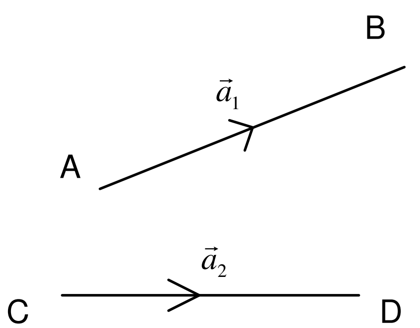
En lo sucesivo, cuando hablemos de VECTOR se entenderá que nos referimos al VECTOR LIBRE.

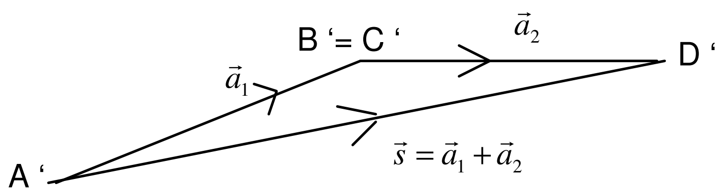
Igualdad entre vectores

Diremos que dos vectores son iguales si son **equipolentes**.

<u>OPERACIONES ENTRE VECTORES</u>

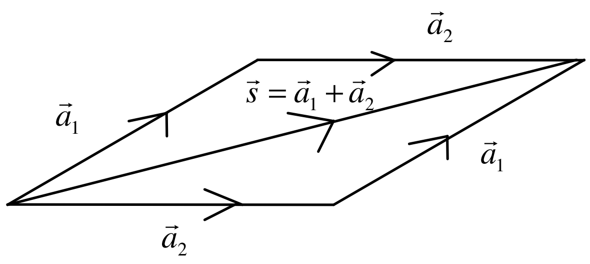
SUMA DE VECTORES.





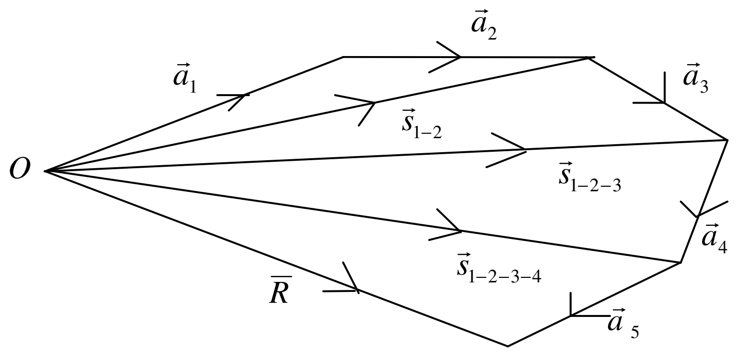
La suma de los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ es el VECTOR cuyo origen es el origen de un vector equipolente de $\vec{a}_1$ y cuyo extremo es el extremo de un vector equipolente de $\vec{a}_2$ trazado a partir del extremo del vector equipolente de $\vec{a}_1$.

Si los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ los ubicamos con un origen común O, para sumarlos podemos utilizar la REGLA DEL PARALELOGRAMO que se ilustra en la siguiente figura:



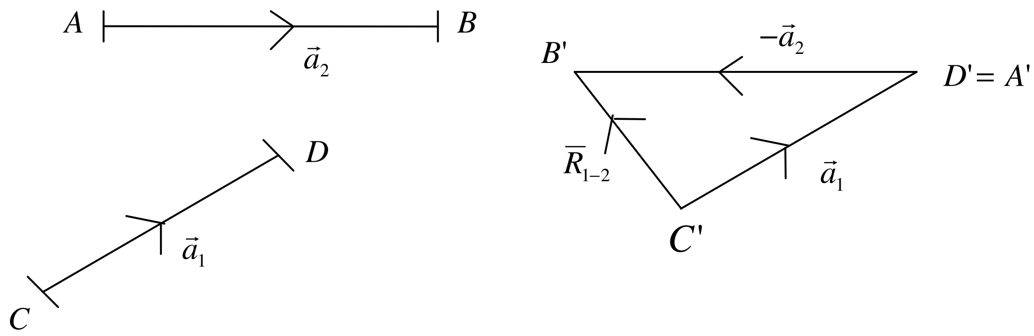
Para efectuar la suma de varios vectores se procede de la siguiente manera: se suman dos de los vectores y su vector SUMA ó RESULTANTE se suma con el siguiente vector y así siguiendo hasta terminar con todos los vectores.

El vector SUMA ó RESULTANTE es el vector que tiene su origen coincidente con el origen del primer vector y su extremo con el extremo del último vector sumado. La representación gráfica es la siguiente:



Si el extremo del último vector a sumar coincide con el origen del primero, el VECTOR SUMA O RESULTANTE ES EL VECTOR NULO.

DIFERENCIA DE VECTORES.

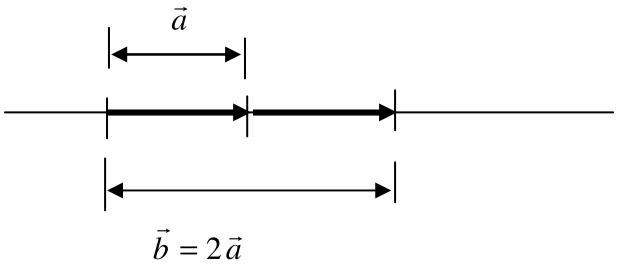


Restar un vector $\vec{a}_2$ de otro $\vec{a}_1$ es equivalente a sumar al vector $\vec{a}_1$ el vector opuesto de $\vec{a}_2$. (OPUESTO DE $\vec{a}_2$ = -$\vec{a}_2$).

En la figura $\vec{R}_{1-2}$ es el vector DIFERENCIA que se obtiene al restar del vector $\vec{a}_1$ el opuesto del vector $\vec{a}_2$.

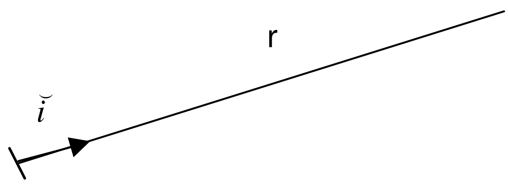
PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Si $\vec{a}$ es un vector y λ un escalar $\neq 0$ perteneciente a los números reales, el producto entre $\vec{a}$ y λ es un nuevo vector cuyo módulo es igual al módulo del vector $\vec{a}$ multiplicado por el valor absoluto del escalar λ; cuya dirección es la que corresponde al vector $\vec{a}$ y cuyo sentido es el del vector $\vec{a}$ si $\lambda > 0$ y el contrario si $\lambda < 0$.



Expresión de un vector en coordenadas cartesianas.

Desde el punto de vista geométrico una recta queda determinada si se conocen de la misma un punto y la dirección mediante un vector módulo unitario $\breve{i}$ llamado **versor**; diremos en éstas condiciones que un eje puede identificarse si se conoce el par ordenado (O , $\breve{i}$) en el cual 0 es el origen siendo el módulo de $\breve{i}$ la unidad de medida.

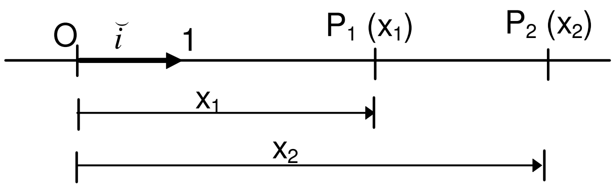


Dado el eje (O, $\breve{i}$) un punto cualquiera del mismo P_i de abscisa x_i se identifica mediante un vector de origen O y extremo P_i que puede expresarse

$$\vec{OP_i} = x_i \breve{i}$$

Si sobre el eje tomamos ahora dos puntos P_1 y P_2:

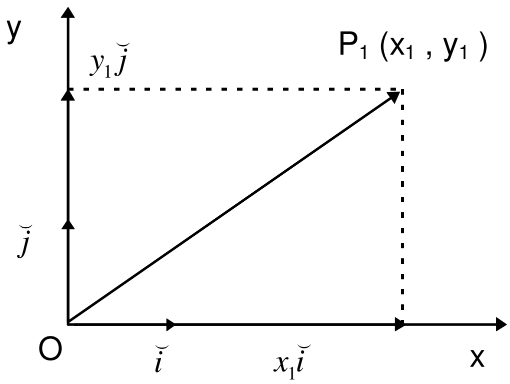
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\breve{i}$$



la distancia entre P_1 y P_2 resultará:

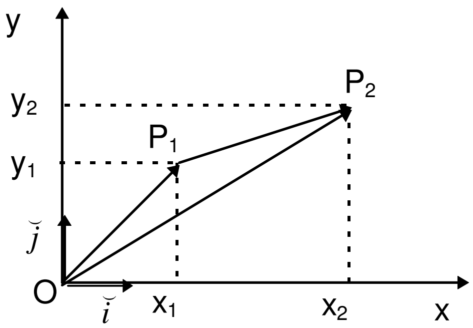
$$|P_1P_2| = x_2 - x_1$$

Para el espacio de dos dimensiones E_2 construimos un sistema de referencia (sistema cartesiano ortogonal); si fijamos dos pares ordenados $(O, \vec{i})$ y $(O, \vec{j})$ representantes de dos ejes perpendiculares, el sistema se expresa $(O, \vec{i}, \vec{j})$ y en él de acuerdo a la conocida regla del paralelogramo:



$$\overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

Expresión de un vector si se conocen las coordenadas de su origen y las de su extremo.



Un punto P cualquiera del plano queda determinado si se da el llamado vector posición (origen O y extremo en P). Podemos obtener la expresión de un vector de origen P_1 y extremo P_2 observando la figura donde :

$$O\vec{P}_1 + P_1\vec{P}_2 = O\vec{P}_2$$

de donde $\quad P_1\vec{P}_2 = O\vec{P}_2 - O\vec{P}_1$

siendo $\begin{array}{l} O\vec{P}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \\ O\vec{P}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \end{array}$

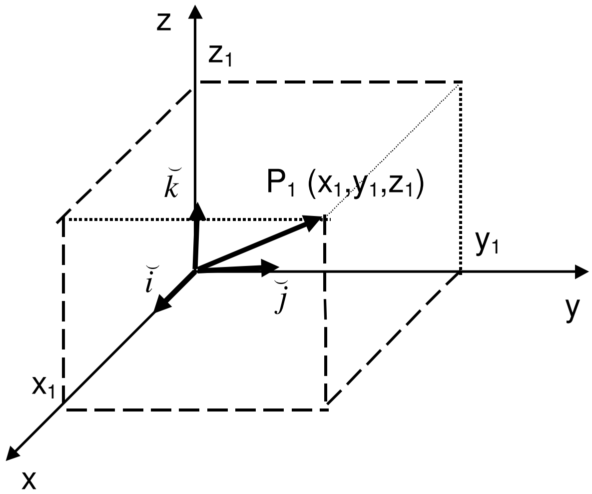
Restando estas dos expresiones nos queda:

$$O\vec{P}_2 - O\vec{P}_1 = P_1\vec{P}_2 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

y la distancia entre P_1 y P_2 igual al módulo del vector $P_1\vec{P}_2$ se obtiene mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras:

$$\left|P_1\vec{P}_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En el espacio tridimensional E_3 identificamos el sistema de referencia por el sistema $\left(O, \breve{i}, \breve{j}, \breve{k}\right)$ en el cual $O\vec{P}_1 = x_1\breve{i} + y_1\breve{j} + z_1\breve{k}$



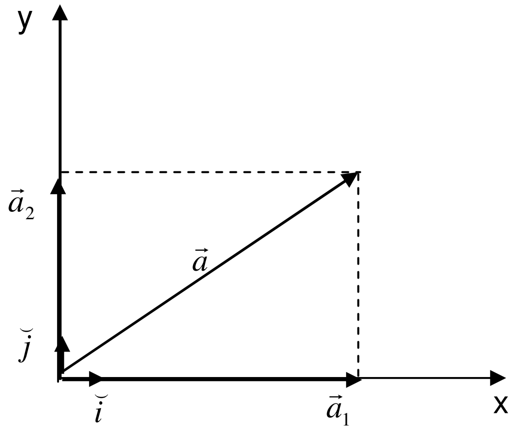
y del mismo modo que para el plano E_2, la expresión general de un vector entre dos puntos:

$$P_1\vec{P}_2 = (x_2 - x_1)\breve{i} + (y_2 - y_1)\breve{j} + (z_2 - z_1)\breve{k}$$

y la distancia entre dos puntos $P_1\vec{P}_2$ será igual al módulo del vector obtenido por aplicación del Teorema de Pitágoras en el espacio

$$\left|P_1\vec{P}_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

EXPRESIÓN CANÓNICA DE UN VECTOR.



Un vector libre puede representarse en un sistema cartesiano ortogonal, de modo tal que su origen coincida con el origen O del sistema de referencia.

En estas condiciones, dicho vector puede ser expresado como la suma de los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ cuyas direcciones coinciden respectivamente con los ejes de abscisas y ordenadas, es decir:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \qquad (1)$$

Si llamamos versores fundamentales en el plano xy a DOS VECTORES CUYOS MÓDULOS SEAN IGUALES A LA UNIDAD: $\breve{i}$ en la dirección y el sentido positivo del eje **x**, $\breve{j}$ en la dirección y sentido positivo del eje **y**, podemos escribir los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_1\breve{i} \\ \vec{a}_2 &= a_2\breve{j} \end{aligned} \qquad (2)$$

siendo a_1 y a_2 los módulos de los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. En estas condiciones

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1\breve{i} + a_2\breve{j} \qquad (3)$$

La expresión (3) es la FORMA CANÓNICA DEL VECTOR $\vec{a}$.

PRODUCTO ESCALAR.

Sean $\vec{a} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j}$

$\breve{b} = b_1\breve{i} + b_2\breve{j}$

Definimos como **producto escalar** al **número** que resulta de realizar el producto de los módulos por el coseno del ángulo comprendido.

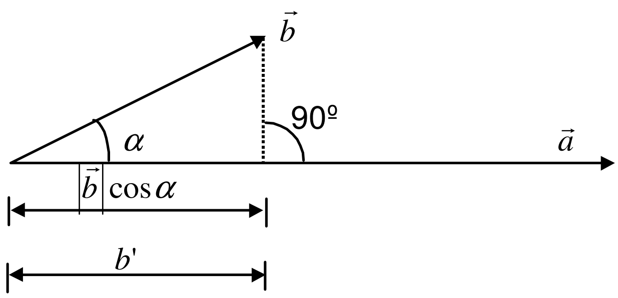
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR.

De la figura, la proyección de $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$ vale $|\vec{b}| \bullet \cos\alpha$; en consecuencia podemos decir que el producto escalar entre dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \quad = |\vec{a}| \cdot b'$$

donde $b' = |\vec{b}| \cos\alpha$



Expresión del producto escalar en función de las componentes de los vectores que se multiplican.

Sean $\vec{a} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j} + a_3\breve{k}$, $\vec{b} = b_1\breve{i} + b_2\breve{j} + b_3\breve{k}$ del espacio E_3

desarrollando:

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{b} &= a_1b_1(\breve{i} \bullet \breve{i}) + a_1b_2(\breve{i} \bullet \breve{j}) + a_1b_3(\breve{i} \bullet \breve{k}) + \\ &+ \quad a_2b_1(\breve{j} \bullet \breve{i}) + a_2b_2(\breve{j} \bullet \breve{j}) + a_2b_3(\breve{j} \bullet \breve{k}) + \\ &+ \quad a_3b_1(\breve{k} \bullet \breve{i}) + a_3b_2(\breve{k} \bullet \breve{j}) + a_3b_3(\breve{k} \bullet \breve{k})\end{aligned}$$

en la que de acuerdo a la definición de producto escalar :

$\breve{i} \bullet \breve{i} = |\breve{i}| \cdot |\breve{i}| \cos 0º = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\breve{j} \bullet \breve{j} = \breve{k} \bullet \breve{k} = 1$ por la misma razón

$\breve{i} \bullet \breve{j} = |\breve{i}| \cdot |\breve{j}| \cdot \cos 90º = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ y del mismo modo

$\breve{i} \bullet \breve{k} = \breve{j} \bullet \breve{i} = \breve{j} \bullet \breve{k} = \breve{k} \bullet \breve{i} = \breve{k} \bullet \breve{j} = 0$

resultando

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

El producto escalar entre dos vectores es un número igual a la suma de los productos de las componentes que tienen la misma dirección.

ÁNGULO ENTRE VECTORES.

Siendo, de acuerdo a lo visto:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

podemos escribir:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}} \cdot \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}}$$

expresión que nos permite obtener el coseno del ángulo entre dos vectores.

CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE VECTORES.

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos sus componentes deben ser proporcionales.

En efecto, si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección, entonces uno de ellos puede ser expresado como el producto entre un escalar y el otro vector:

$$\lambda \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

o bien

$$\lambda\left(b_1 \breve{i} + b_2 \breve{j} + b_3 \breve{k}\right) = a_1 \breve{i} + a_2 \breve{j} + a_3 \breve{k}$$

de donde

$$\lambda b_1 = a_1 \Rightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\lambda b_2 = a_2 \Rightarrow \lambda = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\lambda b_3 = a_3 \Rightarrow \lambda = \frac{a_3}{b_3}$$

que se expresa:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE VECTORES.

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, su producto escalar es nulo, es decir, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Siendo $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{b}$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90º$; como sabemos, $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

igualando las segundas componentes y despejando cos α, obtenemos:

$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Si $\alpha = 90º \Rightarrow \cos\alpha = 0$ y en consecuencia $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

Para saber si dos vectores son perpendiculares verificamos la validez de la expresión anterior, si se cumple son ortogonales; si el resultado $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \neq 0$, entonces afirmamos que los vectores **no son perpendiculares**.

TRABAJO PRÁCTICO

VECTORES

Ejercicio Nº 1.- En E_2 sean $\vec{a}=(1,-1)$; $\vec{b}=(2,3)$; $\vec{c}=(0,1)$; $\vec{d}=(2,4)$ efectuar en forma gráfica y analítica las siguientes operaciones con vectores .

a) $\frac{1}{2}\vec{b}$ b) $2\vec{a}+\vec{b}$ c) $-2\vec{a}-3\vec{c}$ d) $\vec{a}+2\vec{c}+3\vec{d}$

e) $2\,\vec{b}$ f) $3\,\vec{c}$ g) $2\,\vec{a}-2\,\vec{b}$

Ejercicio Nº 2.- Dados los siguientes vectores, hallar sus módulos, representar gráficamente:

a) $\vec{a}=-\breve{i}+2\breve{j}$ b) $\vec{b}=\left(3;-\frac{4}{3}\right)$ c) $\vec{c}=-\frac{5}{2}\breve{i}-\frac{5}{2}\sqrt{3}\breve{j}$

Ejercicio N° 3.- Hallar el producto escalar

a) $\vec{a}=(2,5)$ y $\vec{b}=(-3,2)$

b) $\vec{c}=2\breve{i}+\breve{j}$ y $\vec{d}=4\breve{i}-\breve{j}$

c) $\vec{a}=(1,2,3)$ y $\vec{b}=(-2,1,5)$

d) $\vec{a}=3\breve{i}-2\breve{j}+\breve{k}$ y $\vec{b}=-2\breve{i}-2\breve{j}+2\breve{k}$

Ejercicio Nº 4.- Hallar el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u}=-\breve{i}-\breve{j}+\breve{k}$ $\vec{v}=2\breve{i}+3\breve{j}+\breve{k}$

b) $\vec{u}=\frac{1}{2}\breve{i}+3\breve{j}$ $\vec{v}=4\breve{i}+4\breve{k}$

c) $\vec{u}=\frac{1}{3}\breve{i}-3\breve{j}+6\breve{k}$ $\vec{v}=-2\breve{i}+\frac{1}{9}\breve{k}$